Fonctions de Schur et matrices aléatoires

Paul-Olivier Dehaye
pdehaye@math.ethz.ch

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IHP, Paris, 17 Juin 2009

Motivation

Soit

$$Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$$

le polynôme caractéristique de $U \in \mathrm{U}(N)$, dont les valeurs propres sont $\left\{e^{\mathrm{i}\theta_j}\right\}$.

Motivation

Soit

$$Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$$

le polynôme caractéristique de $U \in \mathrm{U}(N)$, dont les valeurs propres sont $\left\{e^{\mathrm{i}\theta_j}\right\}$.

Conjecture (CFKRS)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(1/2 + \mathrm{i}t)|^{2k} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(P_k(\log \frac{t}{2\pi}) + O(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right) g(t)$$

où P_k est un polynôme de degré k^2

Motivation

Soit

$$Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$$

le polynôme caractéristique de $U \in \mathrm{U}(N)$, dont les valeurs propres sont $\left\{e^{\mathrm{i}\theta_j}\right\}$.

Conjecture (CFKRS)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(1/2 + \mathrm{i}t)|^{2k} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(P_k(\log \frac{t}{2\pi}) + O(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right) g(t)$$

où P_k est un polynôme de degré k^2 et (Keating-Snaith:) $c_{k^2} = a_k g_k$, avec a_k un produit sur les premiers et

$$g_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{\mathrm{U}(N)} |Z_U(0)|^{2k}\,\mathrm{d}U$$

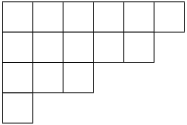
Définitions

Une partition λ est une suite non-décroissante d'entiers $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0, 0, \cdots)$. La longueur $l(\lambda)$ est le nombre de valeurs strictement positives et le poids $|\lambda|$ est la somme $\sum \lambda_i$ des valeurs de la suite.

Définitions

Une partition λ est une suite non-décroissante d'entiers $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0, 0, \cdots)$. La longueur $l(\lambda)$ est le nombre de valeurs strictement positives et le poids $|\lambda|$ est la somme $\sum \lambda_i$ des valeurs de la suite.

Nous identitifions une partition avec son diagramme de Young. Le diagramme de $(6, 5, 3, 1)$, par exemple, est



. Si nous remplissons les cases du diagramme avec des entiers, nous obtenons un tableau de Young.

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Il en existe de nombreuses définitions.

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \sum_T \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)},$$

où la somme est sur les tableaux de Young semi-standards de forme λ avec valeurs dans $(1, \cdots, N)$

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Il en existe de nombreuses définitions.

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \sum_T \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)},$$

où la somme est sur les tableaux de Young semi-standards de forme λ avec valeurs dans $(1, \cdots, N)$ (entrées strictement croissantes en colonnes, non-décroissantes en rangées).

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Il en existe de nombreuses définitions.

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \sum_T \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)},$$

où la somme est sur les tableaux de Young semi-standards de forme λ avec valeurs dans $(1, \cdots, N)$ (entrées strictement croissantes en colonnes, non-décroissantes en rangées).

Par exemple, si $N = 3$ et $\lambda = (2,1)$, T prend les valeurs

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Il en existe de nombreuses définitions.

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \sum_T \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)},$$

où la somme est sur les tableaux de Young semi-standards de forme λ avec valeurs dans $(1, \cdots, N)$ (entrées strictement croissantes en colonnes, non-décroissantes en rangées).

Par exemple, si $N = 3$ et $\lambda = (2, 1)$, T prend les valeurs

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$

et $\mathfrak{s}_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) =$
$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Il en existe de nombreuses définitions.

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \sum_T \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)},$$

où la somme est sur les tableaux de Young semi-standards de forme λ avec valeurs dans $(1, \cdots, N)$ (entrées strictement croissantes en colonnes, non-décroissantes en rangées).

Par exemple, si $N = 3$ et $\lambda = (2, 1)$, T prend les valeurs

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

et $\mathfrak{s}_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) =$
$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$

Donc $\mathfrak{s}_\lambda(1^N)$ compte le nombre de tableaux semi-standards sur $(1, \cdots, N)$.

Définitions (III)

Les polynômes de Schur sont indexés par des partitions, et forment des familles compatibles:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N, 0).$$

Définitions (III)

Les polynômes de Schur sont indexés par des partitions, et forment des familles compatibles:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

Définitions (III)

Les polynômes de Schur sont indexés par des partitions, et forment des familles compatibles:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

En-dehors de ce cas, on a des caractères irréductibles de $\mathrm{U}(N)$ (avec $\mathfrak{s}_\lambda(U) := \mathfrak{s}_\lambda(e^{\mathrm{i}\theta_1}, \cdots, e^{\mathrm{i}\theta_N})$), et

$$\left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U)\overline{\mathfrak{s}_\mu(U)} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \begin{cases} \delta_{\lambda\mu} & \text{si } N \geq l(\lambda) \\ 0 & \text{si } l(\lambda) > N \end{cases}.$$

Définitions (III)

Les polynômes de Schur sont indexés par des partitions, et forment des familles compatibles:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = \mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \cdots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

En-dehors de ce cas, on a des caractères irréductibles de $\mathrm{U}(N)$ (avec $\mathfrak{s}_\lambda(U) := \mathfrak{s}_\lambda(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_N})$), et

$$\left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U)\overline{\mathfrak{s}_\mu(U)} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \begin{cases} \delta_{\lambda\mu} & \text{si } N \geq l(\lambda) \\ 0 & \text{si } l(\lambda) > N \end{cases}.$$

"Pour N large, les $\mathfrak{s}_\lambda$ sont orthonormaux sur $\mathrm{U}(N)$."

La méthode de Bump et Gamburd

Bump and Gamburd calculent

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

via l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N}(1+x_m y_n).$$

La méthode de Bump et Gamburd

Bump and Gamburd calculent

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

via l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k}\right)\overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} \quad = \quad \det(\mathrm{Id} + \overline{U})^{2k}$$

La méthode de Bump et Gamburd

Bump and Gamburd calculent

$$\left\langle \left|Z_U(0)\right|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

via l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} (1+x_m y_n).$$

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k}\right)\overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} &= \det(\mathrm{Id}+\overline{U})^{2k} \\ &= \overline{\det(U)}^{k} \left|\det(\mathrm{Id}+U)\right|^{2k} \\ &= \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} \left|\det(\mathrm{Id}+U)\right|^{2k} \end{aligned}$$

La méthode de Bump et Gamburd

Bump and Gamburd calculent

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

via l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k}\right)\overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} &= \det(\mathrm{Id} + \overline{U})^{2k} \\
&= \overline{\det(U)}^k \, |\det(\mathrm{Id} + U)|^{2k} \\
&= \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} \, |\det(\mathrm{Id} + U)|^{2k}
\end{aligned}$$

ou en remplaçant U par $-U$

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN}\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U) \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k}\right)\overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}.$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}\left(\{1\}^{2k}\right) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

$$|Z_U(0)|^{2k} \quad = \quad (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}\left(\{1\}^{2k}\right) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}\left(\{1\}^{2k}\right) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}$$

Donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}\left(\{1\}^{2k}\right),$$

qui peut être évalué de manière combinatoire, et donne de nombreuses expressions différentes, dont des prolongements analytiques.

Ceci permet d'interpréter le terme géométrique de Keating-Snaith en tant que dimension ou comme cardinalité d'un ensemble. Lequel?

Autre expression

$$
\left\langle Z_U(0)^a \overline{Z_U(0)}^b \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =
$$

$$
\left\langle \sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(1^a) \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \sum_{\mu} \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} \mathfrak{s}_\mu(1^b) \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =
$$

Autre expression

$$\left\langle Z_U(0)^a \overline{Z_U(0)}^b \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =$$

$$\left\langle \sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(1^a) \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \sum_{\mu} \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} \mathfrak{s}_\mu(1^b) \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =$$

$$\sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_1 \leq N}} \mathfrak{s}_\lambda(1^a) \mathfrak{s}_\lambda(1^b)$$

Partitions 3D

Une partition 3D/partition plane est un tableau rectangulaire T d'entiers positifs tels que

$$T_{i,j} \geq T_{i,j+1} \quad T_{i+1,j} \geq T_{i,j}.$$

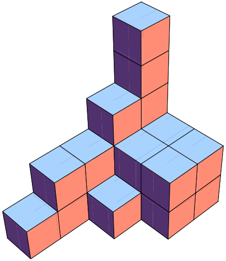
Partitions 3D

Une partition 3D/partition plane est un tableau rectangulaire T d'entiers positifs tels que

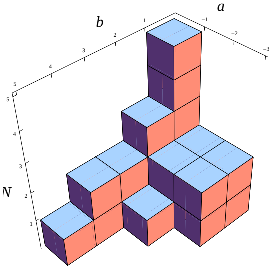
$$T_{i,j} \geq T_{i,j+1} \quad T_{i+1,j} \geq T_{i,j}.$$

Par exemple,

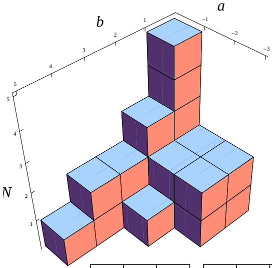
5	2	2
3	2	2
2	1	0
2	0	0
1	0	0

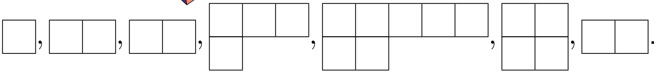


A une partition 3D, on associe une suite de partitions:

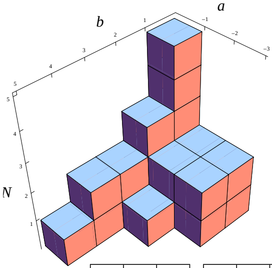


A une partition 3D, on associe une suite de partitions:



donne 

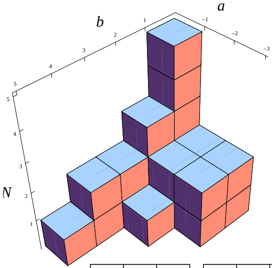
A une partition 3D, on associe une suite de partitions:



donne $\ydiagram{1}$, $\ydiagram{2}$, $\ydiagram{2}$, $\ydiagram{3,1}$, $\ydiagram{5,2}$, $\ydiagram{2,2}$, $\ydiagram{2}$.

A cette suite on peut maintenant associer deux tableaux de forme $(5,2)$: $\begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 \end{ytableau}$ et $\begin{ytableau} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{ytableau}$.

A une partition 3D, on associe une suite de partitions:



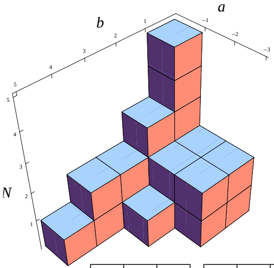
donne $\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$.

A cette suite on peut maintenant associer deux tableaux de forme $(5, 2)$: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$.

$$\left\langle Z_U(0)^a \overline{Z_U(0)}^b \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_1 \leq N}} \mathfrak{s}_\lambda(1^a)\mathfrak{s}_\lambda(1^b) =$$

$$\# \text{ partitions 3D boîte } N \times a \times b = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{a} \prod_{k=1}^{b} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

A une partition 3D, on associe une suite de partitions:



donne $\square$, $\square\square$, $\square\square$, $\begin{matrix}\square\square\square\\ \square\end{matrix}$, $\begin{matrix}\square\square\square\square\square\\ \square\square\end{matrix}$, $\begin{matrix}\square\square\\ \square\square\end{matrix}$, $\square\square$.

A cette suite on peut maintenant associer deux tableaux de forme $(5,2)$: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$.

$$\left\langle Z_U(0)^a \overline{Z_U(0)}^b \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_1 \leq N}} \mathfrak{s}_\lambda(1^a)\mathfrak{s}_\lambda(1^b) =$$

$$\#\ \text{partitions 3D boîte } N \times a \times b = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{a}\prod_{k=1}^{b} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants (valable pour tout ensemble de variables)

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants (valable pour tout ensemble de variables)
  - identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)

$$\mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{h}_{\lambda_i+i-j}\right| = \mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{e}_{\lambda_i^t+i-j}\right|$$

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants (valable pour tout ensemble de variables)
  - identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)

$$\mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{h}_{\lambda_i+i-j}\right| = \mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{e}_{\lambda_i^t+i-j}\right|$$

  - formule de Giambelli

$$\left|\mathfrak{s}_{(\alpha_i|\beta_j)}\right|$$

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants (valable pour tout ensemble de variables)
  - identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)

$$\mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{h}_{\lambda_i+i-j}\right| = \mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{e}_{\lambda_i^t+i-j}\right|$$

  - formule de Giambelli

$$\left|\mathfrak{s}_{(\alpha_i|\beta_j)}\right|$$

- la formule des équerres-contenus (une dimension)

Evaluation

Une fonction de Schur peut être évaluée de nombreuses manières différentes:

- (quotients de déterminant de Vandermonde)
- déterminants (valable pour tout ensemble de variables)
  - identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)

$$\mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{h}_{\lambda_i+i-j}\right| = \mathfrak{s}_\lambda = \left|\mathfrak{e}_{\lambda_i^t+i-j}\right|$$

  - formule de Giambelli

$$\left|\mathfrak{s}_{(\alpha_i|\beta_j)}\right|$$

- la formule des équerres-contenus (une dimension)

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^K\right) &= \prod_{\square\in\lambda}\frac{K+c(\square)}{\mathrm{H}(\square)}\\ &= \frac{K\uparrow\lambda}{H(\lambda)}\end{aligned}$$

La notation $K \uparrow \lambda$ est une généralisation du symbôle de Pochhammer.

Evaluation (II)

$$\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^K\right) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{K + c(\square)}{\mathrm{H}(\square)} = \frac{K \uparrow \lambda}{H(\lambda)}$$

Evaluation (II)

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^K\right) &= \prod_{\square\in\lambda} \frac{K + c(\square)}{\mathrm{H}(\square)} \\ &= \frac{K \uparrow \lambda}{H(\lambda)}\end{aligned}$$

- On retrouve que $\mathfrak{s}_\lambda$ s'annule quand $K \leq l(\lambda)$.

Evaluation (II)

$$\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^K\right) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{K + c(\square)}{\mathrm{H}(\square)} = \frac{K \uparrow \lambda}{H(\lambda)}$$

- On retrouve que $\mathfrak{s}_\lambda$ s'annule quand $K \leq l(\lambda)$.
- On peut regrouper les boîtes de beaucoup de manières différentes: suivant les rangées, les colonnes ou les demi-crochets.

Evaluation (II)

$$\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^K\right) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{K + c(\square)}{\mathrm{H}(\square)} = \frac{K \uparrow \lambda}{H(\lambda)}$$

- On retrouve que $\mathfrak{s}_\lambda$ s'annule quand $K \leq l(\lambda)$.
- On peut regrouper les boîtes de beaucoup de manières différentes: suivant les rangées, les colonnes ou les demi-crochets.
- On peut obtenir le numérateur comme exponentielles d'intégrales, qui admet un prolongement aux λ continus.

$$k \uparrow \lambda = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G'(k+t+1)}{G(k+t+1)} d(\lambda(t) - |t|)\right)$$

Moments de dérivées

On considère les moments de dérivées de polynômes caractéristiques

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z_U'(0)|^{2h} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$)

Moments de dérivées

On considère les moments de dérivées de polynômes caractéristiques

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z_U'(0)|^{2h} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$) ainsi que

$$\left\langle |V_U(0)|^{2k} |V_U'(0)|^{2h} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

avec $V_U(\theta) = e^{\mathrm{i}N(\theta+\pi)/2} e^{-\mathrm{i}\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$

Moments de dérivées

On considère les moments de dérivées de polynômes caractéristiques

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z_U'(0)|^{2h} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N \left(1 - e^{\mathrm{i}(\theta_j - \theta)}\right)$) ainsi que

$$\left\langle |V_U(0)|^{2k} |V_U'(0)|^{2h} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

avec $V_U(\theta) = e^{\mathrm{i}N(\theta+\pi)/2} e^{-\mathrm{i}\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$

Les deux peuvent s'obtenir comme combinaisons linéaires des moments

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}$$

Un théorème dû à Okounkov et Olshanski

Formule du binôme: Soient $\mathfrak{s}_\mu^*$ les "shifted Schur functions", alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1+a_1,\cdots,1+a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu)\leq n}} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_n)}{n\uparrow\mu}.$$

Un théorème dû à Okounkov et Olshanski

Formule du binôme: Soient $\mathfrak{s}^*_\mu$ les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1+a_1,\cdots,1+a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu)\leq n}} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_n)}{n\uparrow\mu}.$$

(Le cas $n=1$ est le théorème du binôme de Newton).

Un théorème dû à Okounkov et Olshanski

Formule du binôme: Soient $\mathfrak{s}^*_\mu$ les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1+a_1,\cdots,1+a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu)\leq n}} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_n)}{n\uparrow\mu}.$$

(Le cas $n=1$ est le théorème du binôme de Newton).

Nous avons aussi que

$$\mathfrak{s}^*_\mu(\{N\}^k) \quad = \quad (-1)^{|\mu|}\frac{(-N\uparrow\mu)(k\uparrow\mu)}{H(\mu)}$$

Un théorème dû à Okounkov et Olshanski

Formule du binôme: Soient $\mathfrak{s}^*_\mu$ les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1+a_1,\cdots,1+a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu)\leq n}} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_n)}{n\uparrow\mu}.$$

(Le cas $n=1$ est le théorème du binôme de Newton).

Nous avons aussi que

$$\mathfrak{s}^*_\mu(\{N\}^k) \quad = \quad (-1)^{|\mu|}\frac{(-N\uparrow\mu)(k\uparrow\mu)}{H(\mu)},$$

et donc $\mathfrak{s}_{\langle N^k\rangle}(1+a_1,\cdots,1+a_n)$ s'exprime comme somme

sur les partitions.

Un théorème dû à Okounkov et Olshanski

Formule du binôme: Soient $\mathfrak{s}^*_\mu$ les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1+a_1,\cdots,1+a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu)\leq n}} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_n)}{n\uparrow\mu}.$$

(Le cas $n=1$ est le théorème du binôme de Newton).

Nous avons aussi que

$$\mathfrak{s}^*_\mu(\{N\}^k) = (-1)^{|\mu|}\frac{(-N\uparrow\mu)(k\uparrow\mu)}{H(\mu)},$$

et donc $\mathfrak{s}_{\langle N^k\rangle}(1+a_1,\cdots,1+a_n)$ s'exprime comme somme

sur les partitions.

“Série de Taylor d'une fonction de Schur à l'identité.”

$$|Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r=(-1)^{kN}\overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N\rangle}(U)}\cdot\sum_{\lambda}(-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\times$$

$$\partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k-r}\cup\{1-\mathrm{i}a_1,\cdots,1-\mathrm{i}a_r\}\right)\big|_{a_j=0}$$

$$|Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r = (-1)^{kN}\overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N\rangle}(U)}\cdot\sum_\lambda(-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\times$$
$$\partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k-r}\cup\{1-\mathrm{i}a_1,\cdots,1-\mathrm{i}a_r\}\right)\Big|_{a_j=0}$$

$$|Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r = (-1)^{kN}\overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N\rangle}(U)}\cdot\sum_{\lambda}(-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\times$$
$$\partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^{2k-r}\cup\{1-ia_1,\cdots,1-ia_r\}\right)\Big|_{a_j=0}$$

et donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r\right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =$$
$$\partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_{\langle N^k\rangle}\left(\{1\}^{2k-r}\cup\{1-ia_1,\cdots,1-ia_r\}\right)\Big|_{a_j=0}.$$

Grâce à Okounkov-Olshanski, nous obtenons

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =$$

$$\imath^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu},$$

Grâce à Okounkov-Olshanski, nous obtenons

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} =$$

$$\mathrm{i}^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu},$$

une fonction rationelle en k.

Fonction génératrice

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$

Fonction génératrice

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$
$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{(-k \uparrow \mu)}{-2k \uparrow \mu} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)^2}$$

Fonction génératrice

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{(-k \uparrow \mu)}{-2k \uparrow \mu} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)^2}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{-k \uparrow \mu}{-2k \uparrow \mu} \frac{\mathfrak{s}_\mu \left(z \,\mathrm{Id}_{N \times N} \right)}{H(\mu)}$$

Fonction génératrice

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{(-k \uparrow \mu)}{-2k \uparrow \mu} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)^2}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{-k \uparrow \mu}{-2k \uparrow \mu} \frac{\mathfrak{s}_\mu (z \, \mathrm{Id}_{N \times N})}{H(\mu)}$$

Proposition:

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \; {}_1F_1\left(-k; -2k; z\, \mathrm{Id}_{N\times N}\right)$$

(fonctions hypergéométriques d'argument matriciel d'après Richards, Gross, Yan, etc). Donne des représentations intégrales, des équations différentielles et des relations de récurrence.

Interprétation probabiliste

$$\dim \lambda := \dim \chi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{H(\lambda)} = \#\text{chemins à } \lambda \text{ ds graphe de Young.}$$

Interprétation probabiliste

$$\dim \lambda := \dim \chi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{H(\lambda)} = \#\text{chemins à } \lambda \text{ ds graphe de Young.}$$

Soit (mesure de Poisson-Plancherel)

$$m(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)^2}{|\lambda|!},$$

tel que

$$\sum_{\lambda \text{ avec } |\lambda| = \text{cst}} m(\lambda) = 1.$$

Interprétation probabiliste

$$\dim \lambda := \dim \chi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{H(\lambda)} = \#\text{chemins à } \lambda \text{ ds graphe de Young.}$$

Soit (mesure de Poisson-Plancherel)

$$m(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)^2}{|\lambda|!},$$

tel que

$$\sum_{\lambda \text{ avec } |\lambda| = \text{cst}} m(\lambda) = 1.$$

La formule obtenue auparavant prend alors la forme

$$\sum_r g(r) \frac{z^r}{r!} = \sum_\lambda f(\lambda) m(\lambda) \frac{z^{|\lambda|}}{|\lambda|!},$$

pour $f(\lambda)$ un produit sur les boîtes de la partition λ.

Interprétation probabiliste (II)

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \frac{(\mathrm{i}z)^r}{r!}$$

$$= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \times \sum_\mu \frac{(-k \uparrow \mu)(N \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} m(\mu) \frac{z^{|\mu|}}{|\mu|!}$$

$$\sum_r g(r) \frac{z^r}{r!} \quad = \quad \sum_\lambda f(\lambda) m(\lambda) \frac{z^{|\lambda|}}{|\lambda|!}$$

Identités de Cauchy

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

Identités de Cauchy

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

Theorème (Bourgade, D., Nikeghbali) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\Re s \geq 1$,

$$\zeta(s)^k = \sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^k\right)\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s}) = \sum_{\lambda} \frac{k \uparrow \lambda}{H(\lambda)} \mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$$

et $\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$ admet un prolongement analytique quand $\Re s > 0$.

Identités de Cauchy

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

Theorème (Bourgade, D., Nikeghbali) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\Re s \geq 1$,

$$\zeta(s)^k = \sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda\left(\{1\}^k\right)\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s}) = \sum_\lambda \frac{k \uparrow \lambda}{H(\lambda)}\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$$

et $\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$ admet un prolongement analytique quand $\Re s > 0$.

Quand $k \to \infty$ ou $k \notin \mathbb{N}$, ceci est non-trivial.

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p \geq 2} \ln(1 - p^{-s})$$

$$= \sum_{p\geq 2} \sum_{k=1} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1} \sum_{p \geq 2} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1} \frac{1}{k} P(ks)$$

où $P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p\geq 2} \ln(1-p^{-s})$$

$$= \sum_{p\geq 2}\sum_{k=1} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1}\sum_{p\geq 2} \frac{p^{-ks}}{k} =$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k} P(ks)$$

où $P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$et donc $P(s) = \sum_{k=1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(\zeta(ks))$.

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p\geq 2} \ln(1-p^{-s})$$

$$= \sum_{p\geq 2}\sum_{k=1} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1}\sum_{p\geq 2} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1} \frac{1}{k} P(ks)$$

où $P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$et donc $P(s) = \sum_{k=1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(\zeta(ks))$.Ceci définit

$$\mathfrak{p}_k(p_i^{-s}) = P(ks)$$

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p\geq 2} \ln(1-p^{-s})$$

$$= \sum_{p\geq 2}\sum_{k=1} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1}\sum_{p\geq 2} \frac{p^{-ks}}{k} =$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k} P(ks)$$

où $P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$et donc $P(s) = \sum_{k=1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(\zeta(ks))$.Ceci définit

$$\mathfrak{p}_k(p_i^{-s}) = P(ks)$$

et les autres fonctions symétriques suivent car $\{\mathfrak{p}_k\}$ génère l'algèbre des fonctions symétriques.

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p\geq 2} \ln(1-p^{-s})$$

$$= \sum_{p\geq 2}\sum_{k=1} \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{k=1}\sum_{p\geq 2} \frac{p^{-ks}}{k} =$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k} P(ks)$$

où $P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$et donc $P(s) = \sum_{k=1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(\zeta(ks))$.Ceci définit

$$\mathfrak{p}_k(p_i^{-s}) = P(ks)$$

et les autres fonctions symétriques suivent car $\{\mathfrak{p}_k\}$ génère l'algèbre des fonctions symétriques.

Ceci donne aussi les expansions en séries pour $\mathfrak{s}_\lambda\left(p_i^{-s}\right)$, autour de $s=1$ par exemple.

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

Conjecture (D.) Soient γ_i les parties imaginaires de zéros de ζ. Il existe des fonctions $f(z,s)$ telles que $\mathfrak{s}_\lambda(f(\gamma_i, s))$ admette un prolongement analytique $\Re s > 0$ et

$$\mathfrak{s}_\lambda(f(\gamma_i, s)) = \mathfrak{s}_{\lambda^t}(p^{-s})$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_\lambda(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} \frac{1}{1 - x_m y_n}$$

$$\sum_\lambda \mathfrak{s}_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_M)\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} 1 + x_m y_n$$

Conjecture (D.) Soient γ_i les parties imaginaires de zéros de ζ. Il existe des fonctions $f(z, s)$ telles que $\mathfrak{s}_\lambda(f(\gamma_i, s))$ admette un prolongement analytique $\Re s > 0$ et

$$\mathfrak{s}_\lambda(f(\gamma_i, s)) = \mathfrak{s}_{\lambda^t}(p^{-s})$$

Restreindre à N zéros de ζ correspond à ne considérer que des partitions λ avec $l(\lambda) \leq N$ (cf. Keating-Snaith).

Question

Une approche pour les problèmes de matrices aléatoires sur U(N) consiste à tout exprimer en terme de fonctions de Schur puis à utiliser

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U), \overline{\mathfrak{s}_\mu(U)} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \delta_{\lambda\mu}.$$

Question

Une approche pour les problèmes de matrices aléatoires sur $\mathrm{U}(N)$ consiste à tout exprimer en terme de fonctions de Schur puis à utiliser

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U), \overline{\mathfrak{s}_\mu(U)} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} \quad = \quad \delta_{\lambda\mu}.$$

Une partie des recettes de CFKRS est de supposer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\alpha}\right)\overline{\mathfrak{m}_\mu\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\beta}\right)}\,\mathrm{d}t = \delta_{\lambda\mu}\mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1+\alpha+\overline{\beta}}\right).$$

Question

Une approche pour les problèmes de matrices aléatoires sur $\mathrm{U}(N)$ consiste à tout exprimer en terme de fonctions de Schur puis à utiliser

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U), \overline{\mathfrak{s}_\mu(U)} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \delta_{\lambda\mu}.$$

Une partie des recettes de CFKRS est de supposer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\alpha}\right) \overline{\mathfrak{m}_\mu\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\beta}\right)} \,\mathrm{d}t = \delta_{\lambda\mu}\mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1+\alpha+\overline{\beta}}\right).$$

Le but serait de répéter cela pour des expressions basées sur $\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$, c-à-d

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{s}_\lambda\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\alpha}\right) \overline{\mathfrak{s}_\mu\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\beta}\right)} \,\mathrm{d}t = ?$$

Question

Une approche pour les problèmes de matrices aléatoires sur $\mathrm{U}(N)$ consiste à tout exprimer en terme de fonctions de Schur puis à utiliser

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \mathfrak{s}_\lambda(U), \overline{\mathfrak{s}_\mu(U)}\right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \delta_{\lambda\mu}.$$

Une partie des recettes de CFKRS est de supposer que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\alpha}\right)\overline{\mathfrak{m}_\mu\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\beta}\right)}\,\mathrm{d}t = \delta_{\lambda\mu}\mathfrak{m}_\lambda\left(p_i^{1+\alpha+\overline{\beta}}\right).$$

Le but serait de répéter cela pour des expressions basées sur $\mathfrak{s}_\lambda(p_i^{-s})$, c-à-d

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{s}_\lambda\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\alpha}\right)\overline{\mathfrak{s}_\mu\left(p_i^{1/2+\mathrm{i}t+\beta}\right)}\,\mathrm{d}t =?$$

ce qui permettrait de passer de preuves basées sur l'orthonormalité de caractères sur $\mathrm{U}(N)$ directement à des conjectures.

Moments

Conjecture: Pour une fonction test $g(t)$ raisonnable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(1/2+\mathrm{i}t)|^{2k} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\log t) g(t)(1+O(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon})\,\mathrm{d}t,$$

où P_k est un polynôme de degré k^2.

$$P_k(\log t,\alpha,\beta) = C\int\cdots\int G_k A_k \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k}\zeta(1+z_i+z_j')\frac{\prod \mathrm{d}z_i}{\prod z_i-\alpha_i}\frac{\prod \mathrm{d}z_i'}{\prod z_i-\beta_i}$$

$$G_k(\mathbf{z}) = \int_0^1 \prod_{i=1}\left(1+e(\theta)t^{z_i}\right)\prod_{j=1}\left(1+e(\theta)t^{z_j'}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

$$A_k(\mathbf{z}) = \prod_p A_{k,p}(\mathbf{z})$$

$$A_{k,p} = \prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{k}\left(1-\frac{1}{p^{1+z_i+z_j'}}\right)\int_0^1\prod_{i=1}\left(1-\frac{e(\theta)}{p^{\frac{1}{2}+z_i}}\right)^{-1}\prod_j\left(1-\frac{e(-\theta)}{p^{\frac{1}{2}+z_j'}}\right)^{-1}$$

Main computations

Just as before,

$$Z_U(a_1)\cdots Z_U(a_r) = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\mathfrak{s}_\lambda\left(e^{-\mathrm{i}a_1},\cdots,e^{-\mathrm{i}a_r}\right).$$

Main computations

Just as before,

$$Z_U(a_1)\cdots Z_U(a_r) \;=\; \sum_{\lambda}(-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\mathfrak{s}_{\lambda}\left(e^{-\mathrm{i}a_1},\cdots,e^{-\mathrm{i}a_r}\right).$$

To the first order in small a, we have

$$e^{-\mathrm{i}a} \approx 1-\mathrm{i}a$$

Main computations

Just as before,

$$Z_U(a_1)\cdots Z_U(a_r) = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\mathfrak{s}_\lambda\left(e^{-\mathrm{i}a_1},\cdots,e^{-\mathrm{i}a_r}\right).$$

To the first order in small a, we have

$$e^{-\mathrm{i}a} \approx 1-\mathrm{i}a,$$

so

$$Z_U'(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\times \partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_\lambda\left(1-\mathrm{i}a_1,\cdots,1-\mathrm{i}a_r\right)\Big|_{a_1=\cdots=a_r=0},$$

where $\partial_j := \partial_{a_j}$.

Main computations

Just as before,

$$Z_U(a_1)\cdots Z_U(a_r) \;=\; \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\mathfrak{s}_\lambda\left(e^{-\mathrm{i}a_1},\cdots,e^{-\mathrm{i}a_r}\right).$$

To the first order in small a, we have

$$e^{-\mathrm{i}a} \approx 1-\mathrm{i}a,$$

so

$$Z_U'(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|}\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)\times \partial_1\cdots\partial_r\mathfrak{s}_\lambda\left(1-\mathrm{i}a_1,\cdots,1-\mathrm{i}a_r\right)\Big|_{a_1=\cdots=a_r=0},$$

where $\partial_j := \partial_{a_j}$.
Also,

$$\begin{aligned}\overline{Z_U(0)}^k &= (-1)^{kN}\overline{\det U}^k Z_U(0)^k\\ &= (-1)^{kN}\overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N\rangle}(U)}Z_U(0)^k.\end{aligned}$$

$$Z'_U(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda \left(1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\right)\Big|_{a_1 = \cdots = a_r = 0}$$

and

$$\overline{Z_U(0)}^k = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} Z_U(0)^k$$

$$Z'_U(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda (1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r)\Big|_{a_1 = \cdots = a_r = 0}$$

and

$$\overline{Z_U(0)}^k = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} Z_U(0)^k$$

imply

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} \cdot \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\} \right)\Big|_{a_j = 0}$$

$$Z_U'(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times$$
$$\partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda \left(1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\right)\Big|_{a_1 = \cdots = a_r = 0}$$

and

$$\overline{Z_U(0)}^k = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} Z_U(0)^k$$

imply

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} \cdot \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times$$
$$\partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\}\right)\Big|_{a_j = 0}$$

$$Z'_U(0)^r = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda (1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r)\big|_{a_1 = \cdots = a_r = 0}$$

and

$$\overline{Z_U(0)}^k = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} Z_U(0)^k$$

imply

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)}\right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle k^N \rangle}(U)} \cdot \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\lambda \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\}\right)\big|_{a_j = 0}$$

et donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle} \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - \mathrm{i}a_1, \cdots, 1 - \mathrm{i}a_r\}\right)\big|_{a_j = 0}.$$

Using Okounkov-Olshanski,

$$\frac{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}_\mu^* \left(\{N\}^k\right) \ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\mu(a_1, \cdots, a_r)\big|_{a_j=0}}{2k \uparrow \mu}$$

Using Okounkov-Olshanski,

$$\frac{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right) \ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\mu(a_1, \cdots, a_r)\big|_{a_j=0}}{2k \uparrow \mu}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right) \left\langle \mathfrak{s}_\mu, \mathfrak{p}_{\langle 1^r \rangle} \right\rangle_{\mathcal{S}_r}}{2k \uparrow \mu}$$

Using Okounkov-Olshanski,

$$\frac{\left\langle |Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)}\right)^r\right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}{\left\langle |Z_U(0)|^{2k}\right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu\vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right)\ \partial_1\cdots\partial_r \mathfrak{s}_\mu(a_1,\cdots,a_r)\big|_{a_j=0}}{2k\uparrow\mu}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu\vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right)\left\langle \mathfrak{s}_\mu, \mathfrak{p}_{\langle 1^r\rangle}\right\rangle_{\mathcal{S}_r}}{2k\uparrow\mu}$$

$$= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu\vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right)\dim\mu}{2k\uparrow\mu}$$

Using Okounkov-Olshanski,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left\langle |Z_U(0)|^{2k}\left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)}\right)^r\right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}{\left\langle |Z_U(0)|^{2k}\right\rangle_{\mathrm{U}(N)}} \\
&\quad = (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right)\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\mu(a_1, \cdots, a_r)\big|_{a_j=0}}{2k \uparrow \mu} \\
&\quad = (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right)\left\langle \mathfrak{s}_\mu, \mathfrak{p}_{\langle 1^r\rangle}\right\rangle_{\mathcal{S}_r}}{2k \uparrow \mu} \\
&\quad = (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}^*_\mu\left(\{N\}^k\right) \dim \mu}{2k \uparrow \mu} \\
&\quad = \mathfrak{i}^r r! \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu},
\end{aligned}
$$

Using Okounkov-Olshanski,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z_U'(0)}{Z_U(0)}\right)^r \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}}{\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{\mathrm{U}(N)}} \\
&= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*\left(\{N\}^k\right)\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_\mu(a_1, \cdots, a_r)\big|_{a_j=0}}{2k \uparrow \mu} \\
&= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*\left(\{N\}^k\right) \left\langle \mathfrak{s}_\mu, \mathfrak{p}_{\langle 1^r \rangle} \right\rangle_{\mathcal{S}_r}}{2k \uparrow \mu} \\
&= (-\mathfrak{i})^r \sum_{\mu \vdash r} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*\left(\{N\}^k\right) \dim \mu}{2k \uparrow \mu} \\
&= \mathfrak{i}^r r! \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu},
\end{aligned}
$$

with a condition that $0 \leq r \leq 2k$.

transpose

$\mathfrak{s}_{k^N}$

$s(U) = 0$ when length

rectangle $< N^k >$

Frobenius

vect

sort

ones

character symmetric group