Yuri Tschinkel

MATHEMATISCHES INSTITUT UNIVERSITÄT GÖTTINGEN SEMINARS WS03-04

Yuri Tschinkel
E-mail : yuri@uni-math.gwdg.de
Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5, 37073 Göttingen.

CONTENTS

ABSTRACTS

We discuss a cup product in Galois cohomology with restricted ramification and an application of it to the structure of a Lie algebra associated with a Galois action on the pro-p fundamental group of $\mathbf{P}^1_{\bar{\mathbf{Q}}} - \{0, 1, \infty\}$.

We construct and study certain Massey products in Galois cohomology which generalize the cup product. We discuss the application of these Massey products to the structure of Iwasawa modules over certain $\mathbf{Z}_p$-Kummer extensions of the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension of a number field.

We describe the quantum cohomology of Grassmannian varieties for classical Lie types.

We describe the connection between Brauer groups and algebraic stacks, with application in algebraic geometry.

For a projective quadric X, we describe some relative cellular structures on the powers of X. As a consequence, we compute the Chow groups of powers of X in terms of the Chow groups of powers of the anisotropic part of X, without reference to motives. Here we do not assume that the characteristic of the base field differs from 2.

I report on progress towards computing the stable reduction of the modular curve $X(p^n)$ to characteristik $p > 2$. This is joint work with Stefan Wewers.

We study certain compactifications of the general linear group and some of their applications.

We discuss some novel estimates of kissing numbers of lattices.

We discuss interesting powerseries identities related to modular units.

We present two constructions of the coarse moduli space of semistable vector bundles on an algebraic curve X. To do so, we survey semistability, Geometric Invariant Theory, illustrate this theory for the moduli space of elliptic curves, and show the importance of the global sections of the generalized Θ-line bundle associated to semistable vector bundles.

To a family of Galois covers of the projective line, together with a linear representation of its Galois group, we associate a so-called variation of local systems. Its first parabolic cohomology is a local system on the base of the family. We study the monodromy of the resulting local system, and give applications to the regular inverse Galois problem.

We report on recent results in the arithmetic intersection theory on compactified Shimura Varieties.

Local models are schemes defined in terms of linear algebra which describe the singularities of the bad reduction of certain Shimura varieties of PEL type (with parahoric level structure). The sheaf of nearby cycles is a sheaf on the special fibre which contains information about the singularities. Since the special fibre of a local model can be identified with a union of Schubert varieties in an affine flag variety, the trace of Frobenius on the sheaf of nearby cycles is an element in the Iwahori-Hecke algebra. The coefficients of this element with respect to the Kazhdan-Lusztig basis show an interesting pattern which can, on the one hand, be described combinatorially, and which on the other hand is related to the cohomology of certain intersections of Schubert cells with opposite Schubert varieties in the affine flag variety. This is joint work with Thomas Haines.

I discuss a finite characteristic analog of the theory of D-modules.

This is a short report on joint work with A.B. Goncharov and A. Levin, in which we give a map of differential graded algebras from multiple polylogarithms to algebraic cycles, using a certain kind of trees.

The deformation space of a formal one-dimensional group of height n possesses an infinite tower of generically étale coverings which are defined by the torsion points of the universal deformation. By the work of Harris and Taylor, one knows that the inductive limit of the corresponding l-adic cohomology groups realizes Langlands and Jacquet-Langlands correspondences in the middle degree. We study natural quasi-compact adic spaces in which these étale coverings are densely contained, and which serve to understand the cohomology groups outside the middle degree.

These are notes from my first talk on Motivic Hodge theory, outlining the construction of limit mixed Hodge structures and their motivic analog.

We explain the recent proof of Catalan's conjecture by Mihăilescu.

Im Vortrag wurde eine Einführung in die geometrische Langlands–Korrespondenz gegeben, mit Hinblick auf neuere Resultate im wenig verzweigten Fall.

Let E/F be a finite separable field extension and let m denote the integral part of $\log_2[E:F]$. David Leep showed that if $\mathrm{char}(F) \neq 2$, then for $n \geqslant m$ the nth power of the fundamental ideal in the Witt ring of E satisfies the equality $I^nE = I^{n-m}F \cdot I^mE$. In this note I present the analogous equality for the Milnor K-groups, that is $K_nE = K_{n-m}F \cdot K_mE$ for $n \geqslant m$.

In this research announcement, I introduce *ℓ-forms* ($\ell \in \mathbb{N}$) over an arbitrary field F. They generalise characteristic properties of quadratic forms in such a way, that the latter are the ℓ-forms for $\ell = 2$ when $\mathrm{char}(F) \neq 2$. These ℓ-forms, which I also name *virtual forms* in general, turn out to be useful for the study of the Milnor K-theory of a field. The connection between both areas is established by a series of maps generalizing Delzant's *Stiefel-Whitney-classes*.

We survey recent progress in the study of analytic properties of solutions of the KdV equation.

We describe the structure of the space of holomorphic surjections onto varieties of non-negative Kodaira dimension (joint with J. M. Hwang and T. Peternell).

Die Gleichung im Titel ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Fermatschen Gleichung $x^p + y^q = z^r$, wobei man sich für primitive (d.h. teilerfremde) ganzzahlige Lösungen interessiert. Einem Ergebnis von Darmon und Granville zufolge gibt es nur endlich viele solche Lösungen, wenn $1/p+1/q+1/r < 1$ ist. In Zusammenarbeit mit Bjorn Poonen (UC Berkeley) und Ed Schaefer (Santa Clara) ist es mir kürzlich gelungen zu zeigen, dass die Liste bekannter Lösungen im Fall $(p, q, r) = (2, 3, 7)$ vollständig ist. Das Problem wird dabei reduziert auf die Bestimmung der Menge der rationalen Punkte auf einer Reihe von Kurven vom Geschlecht 3, wobei wir bei der Aufstellung der Liste von Kurven Überlegungen verwenden, wie sie auch im Beweis der Fermatschen Vermutung vorkommen. Die Bestimmung der rationalen Punkte erfordert die Berechnung des Mordell-Weil-Ranges der Jacobischen unserer Kurven; wir haben dafür Descent-Methoden verallgemeinert. Für alle bis auf eine Kurve lässt sich dann Chabautys Methode anwenden, um die Punkte zu finden; bei der letzten Kurve war eine neue Idee erforderlich.

We consider a toric variety X over $\mathbb{C}$ and are interested in the existence of a full (strongly) exceptional sequence of line bundles on X. On toric surfaces we construct a full exceptional sequence of line bundles and obtain criteria when this sequence is also strongly exceptional. Moreover, we discuss some generalizations for higher dimensional toric varieties.

Ellingsrud und Peskine haben 1989 gezeigt, daß es nur endlich viele Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs im $\mathbb{P}^4$ gibt. Bis heute ist es nicht gelungen, diese Familien vollständig zu klassifizieren. Wir stellen die bekannten Klassifikationsergebnisse vor und geben einen Überblick über die bisher bekannten Familien. Dann erläutern wir, wie wir mit Hilfe von Computeralgebra-Methoden über Körpern der Charakteristik 2 eine neue Familie rationaler Flächen im $\mathbb{P}^4$ konstruiert haben und wie man nachweist, daß diese Flächen nach Charakteristik 0 geliftet werden können.

We report on recent work on arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors on Hilbert modular surfaces. These divisors can be viewed as the coefficients of an elliptic modular form of weight two with values in an arithmetic Chow group in analogy to the classical result of Hirzebruch and Zagier. The intersection of this modular form with the second power of the line bundle of modular forms equipped with the Petersson metric can be determined. In particular we obtain the arithmetic self intersection number of the line bundle of modular forms.

We present a combinatorial approach to geometrical properties of varieties with finitely generated total coordinate ring. For example, it allows to investigate singularities, the Picard group and the ample cone. Our approach generalizes the combinatorial description of toric varieties.

We discuss some recent applications of a twisted topological trace formula to lifts of automorphic representations.

INTRODUCTION

This volume contains lecture notes from the seminars

- Number Theory,
- Algebraic Geometry,
- Geometric methods in representation theory

which took place at the Mathematics Institute of the University of Göttingen during the Winter Term 2003-2004. They have been arranged in chronological order. Almost all contributions report on recent work by the authors.

Yuri Tschinkel

February 12, 2004

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 1–8
Universität Göttingen, 2003-04

A CUP PRODUCT IN GALOIS COHOMOLOGY

R. Sharifi
Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, Bonn 53113 Bonn, Germany • *E-mail :* sharifi@mpim-bonn.mpg.de

Abstract. We discuss a cup product in Galois cohomology with restricted ramification and an application of it to the structure of a Lie algebra associated with a Galois action on the pro-p fundamental group of $\mathbf{P}^1_{\bar{\mathbf{Q}}} - \{0, 1, \infty\}$.

1. The Galois Action on $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

Let $X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} - \{0, 1, \infty\}$. For any algebraic extension $F/\mathbf{Q}$, we may consider the étale fundamental group

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_F) \cong \varprojlim_{Y/X_F \text{ Galois}} \mathrm{Aut}(Y/X_F).$$

The fundamental group over $\bar{\mathbf{Q}}$ is called the geometric fundamental group, and it is isomorphic to the profinite completion of the topological fundamental group:

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}) \cong \pi_1\widehat{(X(\mathbf{C})}),$$

October 22nd, 2003.

and so the geometric fundamental group is a free profinite group on two generators.

Let $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. There is a fundamental exact sequence

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbf{Q}}) \to G_{\mathbf{Q}} \to 1.$$

This yields a canonical outer action

$$\rho\colon G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})).$$

The map ρ is injective by a theorem of Belyi's.

We now wish to work with one prime at a time, so fix a prime number p. Take the maximal pro-p quotient $\pi_1^{(p)} = \pi_1^{\text{pro}-p}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$ of $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$, which is a free pro-$p$ group of two elements. We have an induced representation

$$\rho^{(p)}\colon G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Out}(\pi_1^{(p)}).$$

Following Ihara, let us filter $\pi_1^{(p)}$ by its lower central series $\pi_1^{(p)}(i)$ with $\pi_1^{(p)}(1) = \pi_1^{(p)}$ and

$$\pi_1^{(p)}(i+1) = [\pi_1^{(p)}, \pi_1^{(p)}(i)],$$

for $i \geq 1$. We may then consider the quotient maps

$$\rho^{(p)}(i)\colon G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Out}(\pi_1^{(p)}/\pi_1^{(p)}(i+1)).$$

For example, if $i = 1$ then we have $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})^{\text{ab}} \cong \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$, and the induced map

$$\rho^{(p)}(1)\colon G_{\mathbf{Q}} \to GL_2(\mathbf{Z}_p)$$

is diagonal, given by two copies of the p-adic cyclotomic character χ. Set $F_i^{(p)} = \ker \rho^{(p)}(i)$. We may consider the associated graded object $\mathfrak{g}_p = \oplus_{i\geq 1}\mathrm{gr}^i\mathfrak{g}_p$ with

$$\mathrm{gr}^i\mathfrak{g}_p = F_i^{(p)}/F_{i+1}^{(p)}.$$

The fixed field Ω^* of the kernel of $\rho^{(p)}$ is contained the maximal pro-p unramified outside p extension Ω of $\mathbf{Q}(\mu_p)$ [**Iha86**, Theorem 1]. It is not known if $\Omega = \Omega^*$ (but see [**Sh02**]). In any case, $\mathfrak{g}_p$ is actually given by a filtration on $\mathrm{Gal}(\Omega^*/\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty}))$. Now, $\mathfrak{g}_p$ is a $\mathbf{Z}_p$-Lie algebra under commutator induced from that of $G_{\mathbf{Q}}$. Ihara has shown the following [**Iha86**]: $\mathrm{gr}^i\mathfrak{g}_p$ is free of finite rank over $\mathbf{Z}_p$ and $G_{\mathbf{Q}}$ acts on $\mathrm{gr}^i\mathfrak{g}_p$ by χ^i. Furthermore, $\mathrm{gr}^1\mathfrak{g}_p = \mathrm{gr}^2\mathfrak{g}_p = 0$.

If we take the $\mathbf{Q}_p$-Lie algebra $\mathfrak{g}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$, then this object is expected to be motivic. Deligne has conjectured that $\mathfrak{g}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ is free on one generator σ_i in each odd degree $i \geq 3$ [**Ih89**]. These generators arise from Soulé generators in

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[1/p], \mathbf{Q}_p(i)) \cong \begin{cases} \mathbf{Q}_p & i \text{ odd} \geq 1 \\ 0 & i \text{ even} \geq 0. \end{cases}$$

Hain-Matsumoto showed that $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ is generated by the σ_i [**HM**].

Ihara defined a graded Lie algebra of derivations $\mathscr{D}$ of the free graded $\mathbf{Z}$-Lie algebra on two elements, which he calls the stable derivation algebra [**Ih02**]. There is a natural map $\mathfrak{g}_p \to \mathscr{D} \otimes \mathbf{Z}_p$, which Ihara showed to be injective. Letting D_i be a certain scalar multiple of the image of σ_i, he found a relation

$$2[D_3, D_9] - 27[D_5, D_7] \in 691\mathscr{D},$$

though these two commutators are linearly independent over $\mathbf{Q}$. Hence, $\mathscr{D}$ is not generated by the D_i in degree 12. He was led to conjecture the existence of a similar relation among the σ_i in $\mathrm{gr}^{12}\mathfrak{g}_{691}$ (see [**Ih89**] and [**Ih02**, Conjecture 1(ii)]).

Conjecture 1.1 **(Ihara).** $[\sigma_3, \sigma_9] - 50[\sigma_5, \sigma_7] \in 691\mathrm{gr}^{12}\mathfrak{g}_{691}$.

As I shall explain, I have now proven this conjecture.

2. Cup products and relations

Let p be an odd prime, let $K = \mathbf{Q}(\mu_p)$, and let $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\Omega/K)$, where Ω is as before the maximal pro-p unramified outside p extension of K. The cup product

$$H^1(\mathscr{G}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \otimes H^1(\mathscr{G}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^2(\mathscr{G}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

yields precise information on the form of relations in the pro-p group $\mathscr{G}$. That is, given a minimal presentation

$$1 \to \mathscr{R} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 1,$$

a minimal generating set X of $\mathscr{F}$ provides a basis dual to a basis X^* of H^1, and a minimal generating set R of $\mathscr{R}$ as a normal subgroup of $\mathscr{F}$ provides a dual basis to H^2. Given an ordering on X, we may write the image of $r \in R$ in $\mathscr{F}$ as

$$r \equiv \sum_{x<y \in X} a_{x,y}[x,y] \bmod \mathscr{F}^p\mathscr{F}(3),$$

with $a_{x,y} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ given by

$$a_{x,y} = r(x^* \cup y^*),$$

taking the dual elements $x^*, y^* \in X^*$ to $x, y \in X$.

This relates to Ihara's conjecture as follows (see [**Sh02, McS03**]). The σ_i with $i \le p$ may be lifted to $\tilde{\sigma}_i \in \mathscr{G}$, which may in turn be lifted to $x_i \in \mathscr{F}$ forming part of a generating set X. Set $a_{i,j} = a_{x_i,x_j}$. The group $\mathscr{G}$ is not free pro-p whenever p divides B_k for some k even with $2 \le k \le p-3$. Since

691 divides B_{12}, $\mathscr{R}$ is nontrivial for $p = 691$ (actually, R has cardinality 2). McCallum and I showed that the relation corresponding to $k = 12$ descends to a (possibly trivial) relation in $\mathrm{gr}^{12}\mathfrak{g}$. To prove Ihara's conjecture, we must explain how this relates to his relation and compute the cup product.

3. A pairing for irregular pairs

McCallum and I considered the cup product

$$H^1(\mathscr{G}, \mu_p) \otimes H^1(\mathscr{G}, \mu_p) \to H^2(\mathscr{G}, \mu_p^{\otimes 2}).$$

Since

$$H^i(\mathscr{G}, \mu_p^{\otimes i}) \cong H^i(\mathscr{G}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \otimes \mu_p^{\otimes i},$$

this cup product is equivalent to the cup product above.

Let $\mathscr{E}$ denote the group of p-units of K, and let A denote the p-part of the ideal class group of K. There is a natural injection

$$\mathscr{E}/\mathscr{E}^p \hookrightarrow H^1(\mathscr{G}, \mu_p)$$

and a natural isomorphism

$$H^2(\mathscr{G}, \mu_p) \cong A/pA.$$

Let $\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, and let ω denote the Teichmüller character on Δ. For any $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-module M, we may consider the eigenspace $M^{(i)}$ upon which Δ acts by ω^i. If $p \mid B_k$ for k even with $2 \le k \le p-3$, then $A^{(p-k)}$ is nontrivial. We call (p,k) an irregular pair. By projection, we obtain an induced pairing

$$\langle\ ,\ \rangle_{p,k} \colon \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to A^{(p-k)} \otimes \mu_p.$$

This pairing satisfies the standard relation

$$\langle x, 1-x \rangle_{p,k} = 0$$

if $x, 1-x \in \mathscr{E}$. McCallum and I showed the following computationally [**McS03**, Theorem 5.1].

Theorem 3.1. *For any irregular pair (p,k) with $p < 10{,}000$, there is at most one nontrivial, anti-symmetric, Galois-equivariant pairing*

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mu_p^{\otimes(p+1-k)}$$

up to scalar, satisfying $\langle x, 1-x \rangle = 0$ if $x, 1-x \in \mathscr{E}$.

Since $\langle\ ,\ \rangle_{p,k}$ satisfies these relations and $A_K^{(1-k)}$ has p-rank 1 for all such pairs (p,k), we have at most one nontrivial possibility for this pairing up to scalar.

Fix a pth root of unity ζ. We can define elements of $\mathscr{E}$ for positive odd i as follows:

$$\eta_i = \prod_{j=1}^{p-1} (1-\zeta^j)^{j^{i-1}}.$$

For example, $\eta_1 = p$. Now, Galois equivariance of the cup product implies that $\langle \eta_i, \eta_j \rangle_{p,k} \neq 0$ if $i + j \not\equiv k \bmod p-1$. We define

$$e_{i,k} = \langle \eta_i, \eta_{k-i} \rangle_{p,k}.$$

In proving Theorem 3.1, McCallum and I computed a unique nontrivial possibility for the $e_{i,k}$ up to a common scalar for each (p,k), where $p < 10,000$.

We conjectured that [**McS03**, Conjecture 5.3]:

Conjecture 3.2. *For all irregular pairs (p,k), the pairing $\langle\ ,\ \rangle_{p,k}$ is surjective.*

By a computation of the 37-unit group in a degree 37 extension of $\mathbf{Q}$, McCallum and I were able to prove that $\langle\ ,\ \rangle_{37,32}$ is nontrivial [**McS03**, Theorem 7.5]. However, larger primes were out of range by this method.

Let us again study the relationship with Ihara's conjecture. For each odd $i \geq 3$, the element σ_i is chosen so that if $\alpha_i^p = \eta_i$, then $\tilde{\sigma}_i(\alpha_i) = \zeta\alpha_i$. That is, the image of $\tilde{\sigma}_i$ is Kummer dual to η_i. If Vandiver's conjecture that the real part of A is trivial holds (known for $p <$ 12,000,000 [**BCEMS**]), then we may fix an isomorphism

$$\varphi\colon A^{(p-k)} \otimes \mu_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$$

such that, in particular, $\varphi(e_{i,k}) = a_{i,k-i}$ for $3 \leq i \leq k-3$ with i odd. For $p = 691$ and $k = 12$, the computation with McCallum yields that the value of $e_{5,12}/e_{3,12}$ is -50 if the pairing is nontrivial. This matches up with Ihara's conjectured values for his relation in $\mathfrak{g}_p$, and we proved [**McS03**, Theorem 9.11]:

Theorem 3.3. *If $\langle\ ,\ \rangle_{691,12}$ is nontrivial, then Ihara's conjecture holds.*

4. Relationship with class groups

Fix an odd i and let $\alpha_i^p = \eta_i$. Then $L = K(\alpha_i)$ is a degree p Kummer extension of K which is unramified outside p and Galois over $\mathbf{Q}$. Its Galois group $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ is isomorphic to $\mu_p^{\otimes i}$ as a $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-module.

Let A_L denote the p-part of the class group of L, and let $A_{L,S}$ denote its quotient by the images of primes above p. Let I_G denote the augmentation ideal in $\mathbf{Z}_p[G]$, and let $\mathfrak{m}_G = (p) + I_G$ denote the maximal ideal of $\mathbf{Z}_p[G]$. Let $P_k(a)$ denote the subgroup of $A_K^{(p-k)}/p$ given by twisting $\langle a, \mathscr{E} \rangle_{p,k}$. The following theorem is essentially a result of my work with McCallum:

Theorem 4.1. *If L/K is totally ramified at p, then there is an isomorphism of groups:*

$$(I_G A_{L,S}/\mathfrak{m}_G I_G A_{L,S})^{(p-k+r)} \cong (A_K^{(p-k)}/p)/P_k(a).$$

We have the following corollary.

Corollary 4.2. *If L/K is totally ramified at p and*

$$(I_G A_{L,S}/\mathfrak{m}_G I_G A_{L,S})^{(p-k+r)} = 0,$$

then $\langle \eta_i, \mathscr{E} \rangle_{p,k} \neq 0$.

Our approach will be to find an i for which the condition of the corollary holds.

5. The modular representation

Let $\mathbf{T}_2(p)$ denote the cuspidal Hecke algebra of weight 2 for $\Gamma_1(p)$ and character ω^{k-2} for some even k. Consider the ordinary part $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2(p)^{\mathrm{ord}}$ of $\mathbf{T}_2(p) \otimes \mathbf{Z}_p$, the maximal subfactor upon which the Hecke operator U_p acts invertibly. We will be particularly interested in the Eisenstein ideal $\mathscr{I}$ of $\mathbf{T}$,

$$\mathscr{I} = (U_p - 1) + (T_l - 1 - \omega(l)^{k-2} l \mid l \text{ prime},\ l \neq p).$$

Let $\mathfrak{m} = (p) + \mathscr{I}$ denote the maximal ideal of $\mathbf{T}$ containing $\mathscr{I}$.

Let

$$X = H^1_{\text{ét}}(X_1(p), \mathbf{Z}_p)^{\mathrm{ord}}.$$

The action of $G_{\mathbf{Q}}$ on X provides a homomorphism

$$\rho \colon G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{T}}(X).$$

The module $X \otimes \mathbf{Q}_p$ is free of rank 2 over $\mathbf{T} \otimes \mathbf{Q}_p$, and so one obtains a representation to $GL_2(\mathbf{T} \otimes \mathbf{Q}_p)$. Looking "modulo $\mathscr{I}$" at an inverse limit of such representations for increasing levels p^n, Ohta gave another proof of Iwasawa's Main Conjecture [**Oh00**].

Let $\mathscr{U}$ denote the $\mathbf{Z}_p$-submodule of $\mathbf{T}$ generated by $U_p - 1$. By looking "modulo $\mathscr{I}^2$", I was able to prove (something slightly more general than) the following [**Sh**]:

Theorem 5.1. *Assume that $p \mid B_k$ and $p \nmid B_{p+1-k}$ and that $A^{(k)} = 0$. Let $L = K(\alpha_{k-1})$ and $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Then there is a canonical isomorphism*

$$(I_G A_{L,S}/\mathfrak{m}_G I_G A_{L,S})^{(0)} \cong \mathscr{I}/(\mathscr{U} + \mathfrak{m}\mathscr{I}).$$

The condition on B_{p+1-k} insures that L/K is totally ramified at p. I verified the following by computation [**Sh**].

Theorem 5.2. *For all irregular pairs (p,k) with $p < 1000$, the element $U_p - 1$ generates $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.*

Note that L_∞ contains a pth root of η_{k-1}. Tracing backwards through Theorem 5.2, Theorem 5.1, and the corollary to Theorem 4.1, we obtain the following.

Corollary 5.3. *If (p,k) is an irregular pair with $p < 1000$, then $e_{1,k} \neq 0$. In particular, Conjecture 3.2 holds for all such pairs.*

By Theorem 3.3, we conclude that Ihara's conjecture holds.

References

[BCEMS] J. Buhler, R. Crandall, R. Ernvall, T. Metsänkylä, & M. A. Shokrollahi – Irregular primes and cyclotomic invariants to 12 million, *J. Symbolic Computation* **31** (2001), 89–96.

[HM] R. Hain & M. Matsumoto – Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$, to appear in *Compositio Math.*, arXiv:math.AG/0006158, 2001.

[Iha86] Y. Ihara – Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math.* **123** (1986), no. 1, 43–106.

[Ih89] Y. Ihara – The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, Galois groups over $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Int. Publ., vol. 16, Springer-Verlag, New York, 1989, 299–313.

[Ih02] ——— – Some arithmetic aspects of Galois actions of the pro-p fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, 2002, 247–273.

[McS03] W. McCallum & R. Sharifi – A cup product in the Galois cohomology of number fields, *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 2, 269–310.

[Oh00] M. Ohta – Ordinary p-adic étale cohomology groups attached to towers of elliptic modular curves. II, *Math. Ann.* **318** (2000), 557–583.

[Sh02] R. Sharifi – Relationships between conjectures on the structure of Galois groups unramified outside p, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, 2002, 275–284.

[Sh] R. Sharifi – Iwasawa theory and the Eisenstein ideal, in preparation.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 9–17
Universität Göttingen, 2003-04

MASSEY PRODUCTS AND IWASAWA THEORY

R. Sharifi
Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, Bonn 53113 Bonn, Germany • *E-mail :* sharifi@mpim-bonn.mpg.de

Abstract. We construct and study certain Massey products in Galois cohomology which generalize the cup product. We discuss the application of these Massey products to the structure of Iwasawa modules over certain $\mathbf{Z}_p$-Kummer extensions of the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension of a number field.

1. Introduction

In classical Iwasawa Theory, one begins with an abelian number field K containing μ_p and considers the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension K_∞/K. Denoting its Galois group by Γ, it is typical to consider the Iwasawa algebra $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ and finitely generated modules for this algebra, which are known as Iwasawa modules. A typical Iwasawa module to consider is the Galois group X_K of the maximal unramified abelian pro-p extension of K_∞. There is a good structure theory for Iwasawa modules over Λ [**Iw59, Se59**], and the major result in the area is a theorem (Iwasawa's Main Conjecture, proven by Mazur-Wiles [**McS03**]) describing the eigenspaces of X_K in terms of p-adic L-functions of

October 23rd, 2003.

associated abelian characters of $G_{\mathbf{Q}}$. For our purposes in this talk, it will be sufficient to note that X_K is a finitely generated $\mathbf{Z}_p$-module.

Recently, many number theorists have been studying Iwasawa theory over nonabelian pro-p extensions L_∞/K. That is, they study modules for the Iwasawa algebra $\mathbf{Z}_p[[\mathscr{G}]]$ with $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(L_\infty/K)$, usually in the case that $\mathscr{G}$ is a pro-p p-adic Lie group of dimension at least 2 that contains no elements of order p and L_∞/K is unramified outside a finite set of primes S including those above p in K. In particular, one can study X_L, the Galois group of the maximal unramified abelian pro-p extension of L_∞, or even $X_{L,S}$, the Galois group of the maximal unramified abelian pro-p extension of L_∞ in which all primes outside the set of primes S above p split completely. In studying such Iwasawa modules X_L or $X_{L,S}$, one obvious question to consider is how large they are. For instance, are they ever finitely generated over $\mathbf{Z}_p$ when $\mathscr{G}$ is a p-adic Lie group of dimension at least 2?

My goal for this talk is to present a tool for studying the simplest nonabelian case: that L_∞ is a $\mathbf{Z}_p$-extension of K_∞, so $\mathscr{G}$ is a semidirect product of two copies of $\mathbf{Z}_p$. My approach to studying $X_{L,S}$ will be as follows. Let I_G be the augmentation ideal in $\mathbf{Z}_p[[G]]$. I will study the graded quotients $I_G^k X_{L,S}/I_G^{k+1} X_{L,S}$. These carry the structure of Λ-modules and are successive quotients of each other. I will show how one can describe these modules in terms of the Iwasawa module $X_{K,S}$ over K_∞, the answer coming in terms of a generalization of cup products called Massey products. The primary source for this talk is [**Sh**]. Let me begin with generalities.

2. Cup products in Galois cohomology

Let p be a prime number, $n \geq 1$, K a field, Ω Galois extension of K and $G_{\Omega/K} = \mathrm{Gal}(\Omega/K)$. One has the cup products:

$$H^1(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \otimes H^1(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cup} H^2(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

Let $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Hom}(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Their cup product is represented by the cocycle

$$(\chi_1 \cup \chi_2)(\sigma, \tau) = \chi_1(\sigma)\chi_2(\tau),$$

for $\sigma, \tau \in G_{\Omega/K}$. The cup product is the obstruction to the existence of a homomorphism

$$\rho\colon G_{\Omega/K} \to GL_3(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

with

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \chi_1(\sigma) & \kappa(\sigma) \\ 0 & 1 & \chi_2(\sigma) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for some map $\kappa\colon G_{\Omega/K} \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Precisely, if ρ exists, then

$$d\kappa(\sigma,\tau) = \kappa(\sigma) + \kappa(\tau) - \kappa(\sigma\tau) = -(\chi_1 \cup \chi_2)(\sigma,\tau).$$

Massey products:
We define Massey products inductively. Two-fold Massey products are cup products, and 1-fold are trivial. So let $r \geq 3$, and choose $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \mathrm{Hom}(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Let $T_{r+1}(n)$ be the subgroup of upper-triangular unipotent matrices in $GL_{r+1}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, and let $Z_{r+1}(n)$ denote its center. Assume that there exists a homomorphism

$$\bar{\rho}\colon G_{\Omega/K} \to T_{r+1}(n)/Z_{r+1}(n)$$

with

$$\bar{\rho}(\sigma)_{i,i+1} = \chi_i(\sigma)$$

for $1 \leq i \leq r$. Set

$$\kappa_{i,j}(\sigma) = \bar{\rho}(\sigma)_{i,j+1}$$

for $1 \leq i \leq j \leq r$ and $(i,j) \neq (1,r)$.
Then the r-fold Massey product

$$(\chi_1, \ldots, \chi_r) \in H^2(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

is represented by the cocycle

$$(\sigma,\tau) \mapsto \sum_{i=1}^{r-1} \kappa_{1,i}(\sigma)\kappa_{i+1,r}(\tau).$$

This cocycle is the obstruction to lifting $\bar{\rho}$ to $\rho\colon G_{\Omega/K} \to T$.

For example, if $r = 3$, then

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \chi_1 & \kappa_{1,2} & * \\ 0 & 1 & \chi_2 & \kappa_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 & \chi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and the cocycle is

$$(\sigma,\tau) \mapsto \chi_1(\sigma)\kappa_{2,3}(\tau) + \kappa_{1,2}(\sigma)\chi_3(\tau).$$

There is an inherent ambiguity in the definition of the Massey product arising from the choices in the classes of maps $\kappa_{i,j}$, i.e., the choice of defining system. For example, $\kappa_{1,2}$ is defined only up to a cocycle, since it must satisfy $d\kappa_{1,2} = \chi_1 \cup \chi_2$. So (χ_1, χ_2, χ_3), for instance, is well-defined only as an element of

$$H^2(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})/(\chi_1 \cup H^1(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) + H^1(G_{\Omega/K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \cup \chi_3).$$

We will be interested in Massey products of the form $(\chi_1, \ldots, \chi_1, \chi_r)$. In this case, we can reduce the ambiguity in the definition to shorter Massey products of the same form (with χ_r replaced by an arbitrary character).

Massey products with coefficients in roots of unity:
Now assume that $\operatorname{char} K \neq p$ and $\mu_{p^n} \subset K$ and fix positive integers $m \leq n$ and $k \leq p^{n+m-1} - 1$. Note that

$$H^1(G_{\Omega/K}, \mu_{p^m}) \cong (K^\times \cap \Omega^{\times p^m})/K^{\times p^m}.$$

Assume given $a \in K^\times \cap \Omega^{\times p^n}$ with $a \notin K^{\times p}$ and $b \in K^\times \cap \Omega^{\times p^m}$. We will consider $(k+1)$-fold Massey products of the form $(\chi_a, \ldots, \chi_a, \chi_b)$, where χ_a and χ_b denote the Kummer characters associated to a and b, respectively. These will take values in a to-be-defined quotient of $H^2(G_{\Omega/K}, \mu_{p^m}^{\otimes(k+1)})$ and are denoted by $(a,b)^{(k)}_{p^m,\Omega/K}$.

Operators: Let G be a cyclic group of order p^n, and let σ generate G. Define

$$D^{(k)} = D^{(k)}_\sigma = (-1)^k \sum_{i=k}^{p^n-1} \binom{i}{k} \sigma^{i-k} \in \mathbf{Z}[G].$$

For $j \leq k$, we have

$$(\sigma - 1)^j D^{(k)} \equiv D^{(k-j)} \bmod p^m\mathbf{Z}[G].$$

Note that $D^{(0)}$ is the norm element of $\mathbf{Z}[G]$.

To obtain an acceptable formula for the Massey products and to reduce the ambiguity in their definition, we restrict the allowable choices of defining systems. Let $\alpha^{p^n} = a$, let $L = K(\alpha)$, set $G = G_{L/K}$, and let σ be a generator. Let $\zeta = \alpha^{\sigma-1} \in \mu_{p^n}$. Note: ζ is primitive. We will assume that $b = N_{L/K}y$ for some $y \in L^\times$ and that $D^{(k-1)}y \in \Omega^{\times p^m}$. Let us denote the group of such b by $U^{(k)}_{m,n}(a)$, and the set of such y for a given b by $V^{(k)}_{m,n}(a,b)$.

Let $[x]$ denote the class of $x \in \Omega^\times$ in $H^1(G_\Omega, \mu_{p^m}) \cong \Omega^\times/\Omega^{\times p^m}$. There is a natural boundary map in the sequence of base terms of the Hochschild-Serre spectral sequence called *transgression*. In our case, this is a map

$$\mathrm{Tra}_\Omega\colon H^1(G_\Omega, \mu_{p^m})^{G_{\Omega/K}} \to H^2(G_{\Omega/K}, \mu_{p^m}).$$

Let

$$P^{(k)}_{m,n}(a) = \langle \mathrm{Tra}_\Omega\,[D^{(k)}y] \mid b \in U^{(k)}_{m,n}(a), y \in V^{(k)}_{m,n}(a,b)\rangle.$$

Theorem 1. *For $b \in U^{(k)}_{m,n}(a)$ and $y \in V^{(k)}_{m,n}(a,b)$, define the $(k+1)$-fold Massey product of a and b to be*

$$(a,b)^{(k)}_{p^m,\Omega/K} = \mathrm{Tra}_\Omega\,[D^{(k)}y] \otimes \zeta_m^{\otimes k} \pmod{P^{(k-1)}_{m,n}(a) \otimes \mu_{p^m}^{\otimes k}},$$

where $\zeta_m = \zeta^{p^{n-m}}$. This definition doesn't depend on the choice of y or σ.

Proof. We illustrate independence from the choice of y. If $y, y' \in V^{(k)}_{m,n}(a,b)$, then $y' = yz^{\sigma-1}$ for some $z \in L^\times$, and

$$D^{(k)}y' \equiv D^{(k)}yD^{(k-1)}z \bmod L^{\times p^m}.$$

Similarly, $D^{(k-2)}z \in \Omega^{\times p^m}$, so

$$\mathrm{Tra}_\Omega[D^{(k-1)}z] \in P^{(k-1)}_{m,n}(a).$$

□

In fact, this definition is consistent with our earlier definition of Massey products in the sense that $(a,b)^{(k)}_{p^m,\Omega/K} \otimes \zeta_m^{\otimes -(k+1)}$ is the class of a defining system

$$\bar{\rho}\colon G_{\Omega/K} \to T_{k+2}(m)/Z_{k+2}(m)$$

associated with y.

If K is a number field and Ω is the maximal extension unramified outside a finite set of primes including those above p, then

$$H^2(G_{\Omega/K}, \mu_{p^n}) \cong A_K/p^nA_K,$$

where A_K denotes the p-part of the class group of K. The transgression map takes a class $[x]$ with $x \in \Omega^\times$ to the class modulo p^{n-r} of an ideal $\mathfrak{A}$ of $\mathscr{O}_{K,S}$ (S-integers) with $\mathfrak{A}\mathscr{O}_{\Omega,S} = x\mathscr{O}_{\Omega,S}$. In particular, one can give a formula as in Theorem 1, but in terms of ideal classes (with a slightly stronger restriction on k).

3. Iwasawa Theory

Let K be a number field and $K_n = K(\mu_{p^n})$ for $n \le \infty$, S a set of primes including those above p and all real archimedean places. Let Ω be the maximal extension of K unramified outside S, L_∞ a $\mathbf{Z}_p$-extension of K_∞ unramified outside S and $X_{K,S}$ (resp., $X_{L,S}$) the Galois group of the maximal unramified pro-p abelian extension of K_∞ (resp., L_∞) in which all primes above those in S split completely.

There exists a sequence of elements $a = (a_n)$ for n sufficiently large and a nondecreasing sequence (l_n) with infinite limit and $l_n \le n$ for all n, such that $a_n \in K_n^\times \cap \Omega^{\times p^{l_n}}$, $a_n \notin K_n^{\times p}$, with

$$a_{n+1}a_n^{-1} \in K_{n+1}^{\times p^{l_n}}$$

and such that, setting $\alpha_n^{p^{l_n}} = a_n$ and $L_n = K_n(\alpha_n)$, we have $L_\infty = \cup L_n$. For simplicity of writing, let us assume $l_n = n$ for all n.

Fix k, and let r be such that $k < p^r(p-1)$. We set

$$P_\infty^{(k)}(a) = \varprojlim P_{n-r,n}^{(k)}(a_n) \le X_{K,S}.$$

Let $G = G_{L_\infty/K_\infty}$, $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[G_{K_\infty/K}]]$, and I_G be the augmentation ideal of $\mathbf{Z}_p[[G]]$.

Theorem 2. *Assume that every prime above S in K_∞ other than v splits completely in L_∞ and that v does not split. We have a canonical isomorphism of pro-p groups,*

$$I_G^k X_{L,S}/I_G^{k+1}X_{L,S} \cong (I_G/I_G^2)^{\otimes k} \otimes_{\mathbf{Z}_p} X_{K,S}/P_\infty^{(k)}(a),$$

which is an isomorphism of Λ-modules if L_∞/K is Galois.

Note: I_G/I_G^2 is noncanonically isomorphic to $\mathbf{Z}_p$ as a $\mathbf{Z}_p$-module.
The theorem holds with $k=0$ by the assumption, with $P_\infty^{(0)}(a)=0$.
Theorem 2 tells us that Massey products determine the structure of the graded quotients of $X_{L,S}$ with respect to the augmentation filtration.

Examples:
Let p be even, $K=\mathbf{Q}(\mu_p)$, and $K_n=\mathbf{Q}(\mu_{p^n})$ for $n\le\infty$. Let S consist of the unique prime above p. Note that $X_{K,S}=X_K$, the Galois group of the maximal unramified pro-p abelian extension of K_∞.

Let T be the group of integer sequences $t=(t_n)$ with

$$t_{n+1}\equiv t_n \bmod p^{n-1}(p-1).$$

Let L_∞ be a totally ramified $\mathbf{Z}_p$-extension of K_∞ Galois over $\mathbf{Q}$. Then $G=\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)\cong\mathbf{Z}_p(t)$ for some $t\in T$. One can ask if $X_{L,S}$ is finitely generated as a $\mathbf{Z}_p$-module, or slightly more weakly, if $I_G^kX_{L,S}/I_G^{k+1}X_{L,S}$ is eventually finite. The latter condition is equivalent to $X_{L,S}$ being a torsion $\mathbf{Z}_p[[G]]$-module. Coates-Sujatha and Venjakob had asked if this is always true, which would have been a natural analogue of a conjecture of Greenberg's.

Let $\zeta=(\zeta_n)$ be a generator of the Tate module. For $t\in T$, we may define a sequence of cyclotomic p-units $\lambda_t=(\lambda_{t,n})$, where

$$\lambda_{t,n}=\prod_{\substack{i=1\\(i,p)=1}}^{p^n-1}(1-\zeta_n^i)^{i^{t_n-1}}.$$

Then

$$\lambda_{t,n+1}\lambda_{t,n}^{-1}\in K_{n+1}^{\times p^n}.$$

Set $\mathscr{G}=\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$. Let $\Delta=\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, let ω denote the Teichmüller character, and for $i\in T$, set

$$\varepsilon_i=\frac{1}{p-1}\sum_{\delta\in\Delta}\omega(\delta)^{-i}\delta\in\mathbf{Z}_p[\Delta].$$

Assume for now that L_∞ is defined by some such sequence λ_t (with t_1 odd).

Proposition. *Assume that A_K has p-rank 1, and let r even be such that $A_K = \varepsilon_{1-r}A_K$. If $(\lambda_{t,1}, \lambda_{r-t,1})^{(1)}_{p,\Omega/K} \neq 0$, then $X_{L,S} \cong X_K$ as $\mathbf{Z}_p[[\mathscr{G}]]$-modules.*

In particular, in this case $X_{L,S}$ is pseudo-null as a $\mathbf{Z}_p[[\mathscr{G}]]$-module (in the sense of Venjakob).

Corollary. *For $p = 37$ and $t \in T$ with $t \not\equiv 5, 27 \bmod 36$ (or $p = 59$ and $t \in T$ with $t \not\equiv 15, 29, 51 \bmod 58$, and so on), we have isomorphisms of $\mathbf{Z}_p[[\mathscr{G}]]$-modules,*

$$X_{L,S} \cong X_K \cong \mathbf{Z}_p(s),$$

for some $s \in T$ with $s \equiv 5 \bmod 36$. If, furthermore, $t \not\equiv 31 \bmod 36$, then $X_L \cong \mathbf{Z}_p(s)$ as well.

$X_{L,S}$ can also have larger p-rank than X_K as well.

Proposition. *Assume that $X_K \cong \mathbf{Z}_p(s)$ for some $s \in T$. Let $t = 1-2s$. Then we have isomorphisms of Λ-modules,*

$$I_G^k X_{L,S}/I_G^{k+1} X_{L,S} \cong \mathbf{Z}_p(s + kt),$$

if $k = 0$ or 1, and for $k = 2$ if $3s \not\equiv -1 \bmod p - 1$.

Now let us take that case that $G \cong \mathbf{Z}_p(t)$ with t_1 even. Assume also that $p \mid B_k$ for some $k \not\equiv t \bmod p - 1$. Then Hachimori and I prove (something more general than) the following [**HS**].

Proposition. *Assume that $X_K \cong \mathbf{Z}_p(1-t) \oplus \mathbf{Z}_p(1-r)$ for some $r \not\equiv t \bmod p - 1$ with r_1, t_1 even. Then we have injections of Λ-modules,*

$$\mathbf{Z}_p(1 - r + kt) \hookrightarrow I_G^k X_{L,S}/I_G^{k+1} X_{L,S}$$

for all $k \geq 0$.

Hence, it is not always the case that $X_{L,S}$ is $\mathbf{Z}_p[[G]]$-torsion. Still, it is an open question if $X_{L,S}$ is always $\mathbf{Z}_p[[G]]$-torsion when L_∞ is defined by a sequence of cyclotomic p-units.

References

[HS] Y. Hachimori & R. Sharifi – On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules, in preparation.

[Iw59] Y. Ihara – On Γ-extensions of algebraic number fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 183–226.

[McS03] B. Mazur & A. Wiles – Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, *Inv. Math.* **84** (1986), 179–330.

[Se59] J.-P. Serre – Classes des corps cycltomique (d'après K. Iwasawa), Séminaire Bourbaki, no. 174, 1959.

[Sh] R. Sharifi – Massey products and ideal class groups, preprint, arXiv:math.NT/0308165.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 19–25
Universität Göttingen, 2003-04

QUANTUM COHOMOLOGY OF GRASSMANNIANS

A. Kresch
Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, U.K.
E-mail : kresch@maths.warwick.ac.uk

Abstract. We describe the quantum cohomology of Grassmannian varieties for classical Lie types.

1. Generalities

Quantum cohomology is a deformation of the usual cohomology ring

$$H^*(X) = H^*(X, \mathbb{Z})$$

of an algebraic variety X (for this talk, assumed to be a projective homogeneous variety). One introduces a new *formal* parameter q. A key feature of the deformed cohomology is the new multiplication:

$$\alpha * \beta = (\alpha \cup \beta) + (\alpha * \beta)_1 q + (\alpha * \beta)_2 q^2 + \cdots$$

where α, β are classes in $H^*(X)$. More generally, one will have deformation parameters q^δ, where the indexing is by effective curve classes $\delta \in H_2(X, \mathbb{Z})$.

October 27th, 2003.

The enumerative significance of these is that

$$\int_X (\alpha * \beta)_d \cup \gamma$$

is the number of degree d rational curves on X incident to cycles A, B, C in general postion which are Poincare dual to the classes α, β, γ.

Example 1.1. Consider $X = \mathbb{P}^2$. Then $[L] = h$, $[pt] = h^2$ (the classes of lines and points) and

$$\int_{\mathbb{P}^2} (h * [pt])_1 \cup [pt] = 1,$$

the number of lines incident to one line and 2 points (in general position). So

$$(h * [pt])_1 = 1 \in H^*(\mathbb{P}^2)$$

and

$$h * [pt] = 0 + 1 \cdot q.$$

The quantum cohomology ring is graded with

$$\deg q^\delta = \int_\delta c_1(T_X).$$

In particular, for $X = \mathbb{P}^2$, we have $\deg q = \int_{\text{line}} c_1(T_X) = 3$. So $h^2 = [pt]$ (with no quantum correction terms, for degree reasons), and $h^3 = h * [pt] = q$. This gives us the ring presentation

$$QH^*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[h, q]/(h^3 - q).$$

Note that the classical presentation is $H^*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[h]/h^3$.

It is a general phenomenon that (for our varieties X) the quantum cohomology ring $QH^*(X)$ is generated by the classical generators together with the q-parameters, with every classical relation replaced by a q-deformed relation which holds in the quantum cohomology.

2. Grassmannians

Let $X = Gr(k, n) = \{\Lambda^k \subset \mathbb{C}^n\}$ be the Grassmannian of k-planes in n-dimensional space. Classically, it is known that as an abelian group,

$$H^*(X) = \oplus \mathbb{Z}\sigma_\lambda,$$

where the sum is over partitions $\lambda \subset ((n-k)^k)$ and σ_λ are the classes of Schubert subvarieties of X:

$$X_\lambda = \{\Lambda \mid \dim(\Lambda \cap E_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i\},$$

where $E_1 \subset \cdots$ is a complete flag of subspaces of $\mathbb{C}^n$. The partitions λ are identified with their Young diagrams of boxes sitting in a rectangle $((n-k)^k)$ with $n-k$ columns and k rows. Recall that $\dim(X) = k(n-k)$ and $\operatorname{codim}(X_\lambda) = |\lambda|$, the sum of the parts of λ. Finally,

$$\int \sigma_\lambda \cup \sigma_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \lambda^\vee \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\lambda^\vee$ denotes the set of boxes in $((n-k)^k)$ not in λ (rotated 180 degrees so as to become another partition). This gives the Poincare duality involution on the set indexing the Schubert classes.

The structure constants for multiplication in $H^*(X)$ are called *Littlewood-Richardson coefficients*:

$$\sigma_\lambda \cup \sigma_\mu = \sum c^\nu_{\lambda\mu} \sigma_\nu.$$

The case of $\lambda = (p) = (p, 0, \dots, 0)$ was studied classically, with σ_p called the p-th *special Schubert class.*

The Pieri rule is :

$$\sigma_p \sigma_\lambda = \sum_\mu \sigma_\mu$$

where the sum is over all μ whose Young diagram contains λ with $|\mu| = |\lambda| + p$ such that μ/λ (the set of boxes in μ not in λ) has at most one box per column. For example,

$$\sigma_2 \sigma_1 = \sigma_{21} + \sigma_3.$$

The classes $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}$ generate $H^*(X)$ as a ring. A presentation of this ring is given by

$$\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}]/(r_{k+1}, \dots, r_n)$$

where $\deg(r_i) = i$,

$$r_i = \det \left.\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots \\ 0 & 1 & \sigma_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_1 \end{pmatrix}\right\} i$$

This is everything one needs to know to generalize the case of a projective plane. We have

$$\int_{\text{line}} c_1(T_X) = n,$$

the degree of the quantum deformation parameter q. Concretely,

$$QH^*(X) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, q]/(r_{k+1}, \dots, r_{n-1}, r_n - cq)$$

for some c, simply for degree reasons. We need to determine the integer c. We have

$$\begin{aligned} r_n = \det \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots \\ 0 & 1 & \sigma_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_1 \end{pmatrix} &= \sigma_1 r_{n-1} - \det \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots \\ 1 & \sigma_1 & \cdots \\ 0 & 1 & \sigma_1 \end{pmatrix} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-k-1} \sigma_{n-k} \det \left.\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots \\ 1 & \sigma_1 & \cdots \\ 0 & 1 & \sigma_1 \end{pmatrix}\right\} k \\ &= (-1)^{n-k-1} \sigma_{n-k} * \sigma_{(1^k)}. \end{aligned}$$

The classical Giambelli formula says that for $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ we have

$$\sigma_\lambda = \det \begin{pmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & \sigma_{\lambda_\ell - 1} & \sigma_{\lambda_\ell} \end{pmatrix} \tag{1}$$

So, c is $(-1)^{n-k-1}$ times the number of lines on X incident to general translates of $X_{n-k}, X_{(1^k)}$ and a point. An analogous enumerative fact to the fact that there is a single line through two points gives $c = (-1)^{n-k-1}$. So

$$QH^*(X) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-k}, q]/(r_{k+1}, \ldots, r_{n-1}, r_n + (-1)^{n-k} q).$$

This computation appeared in a paper by Witten in 1995 [**Wit95**]. Note that it left open the problem of expressing the product $\sigma_\lambda \sigma_\mu$ as a combination of $q^d \sigma_\nu$, with $|\nu| + dn = |\lambda| + |\mu|$. Bertram, in 1997, proved the *quantum Giambelli formula*:

(1) holds in $QH^*(X)$ [**Ber97**].

He also proved a *quantum Pieri rule*:

$$\sigma_p * \sigma_\lambda = \sigma_p \cup \sigma_\lambda + (\sigma_p * \sigma_\lambda)_1 q,$$

where there is an explicit combinatorial description of $(\sigma_p * \sigma_\lambda)_1$. The following theorem is recent joint work with Buch and Tamwakis

Theorem 2.1. [**BKT03**] *The general quantum structure constant*

$$\langle \sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle_d = c_{\lambda\mu}^{\nu^\vee}$$

is given by

$$\langle \sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle_d = \int_{F(k-d,k+d;n)} \sigma_\lambda^{(d)} \sigma_\mu^{(d)} \sigma_\nu^{(d)},$$

a classical structure constant on a partial flag variety.

Quantum structure constants are also known as genus 0 *Gromov-Witten invariants*.

There is a classical combinatorial formula for the Littlewood-Richard coefficients in terms of Young tableaux. A new combinatorial interpretation, using objects called *puzzles* was given by Knutson-Tao-Woodward [**KTW04**]. The rule of Knutson-Tao-Woodward goes as follows. Each partition λ is translated into a string $\mathrm{string}_\lambda^{0,1}$ of 0's and 1's, of length n. This is accomplished by drawing λ inside the rectangle $((n-k)^k)$. The south-east border of λ, connecting the bottom-left corner of the rectangle to the top-right corner, consists of n segments. Label each vertical segment with 0 and each horizational segment with 1. Now read from bottom-left to top-right to get $\mathrm{string}_\lambda^{0,1}$. Puzzles are composed of puzzle pieces of three types (rotations are allowed) and fill a triangular region of side length n. The rule is:

$$\int_X \sigma_\lambda \cup \sigma_\mu \cup \sigma_\nu = \#\{\text{puzzles with border } \mathrm{string}_\lambda^{0,1},\ \mathrm{string}_\mu^{0,1},\ \mathrm{string}_\nu^{0,1}\}.$$

Knutson gave a conjectural generalization to the case of two-step partial flag varieties. In combination with Theorem 2.1 we get a conjectural *quantum Littlewood-Richardson rule*. Starting with λ form $\mathrm{string}_\lambda^{0,2}$ (as above, but with the symbol 1 replaced by 2). In the string $\mathrm{string}_\lambda^{0,2}$, change the first d 2's and the last d 0's to 1 to get $\mathrm{string}_\lambda(d)$.

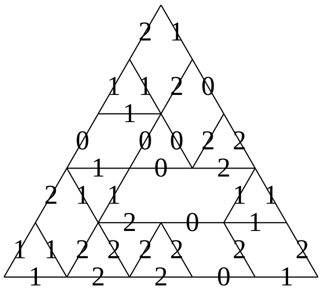
Conjecture 2.2. The quantum structure constants on X are given by

$$\langle \sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle_d = \#\{\text{puzzles with border } \mathrm{string}_\lambda(d),\ \mathrm{string}_\mu(d),\ \mathrm{string}_\nu(d)\}.$$

In Conjecture 2.2 there is a specific set of puzzle pieces with sides labelled 0, 1, 2, including two kinds of variable-length puzzle pieces. As an example, we have

$$\langle \sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{31} \rangle_1 = 1$$

on $Gr(2,5)$ and there is a corresponding unique puzzle displayed below:



Conjecture 2.2 has been checked by computer for $n \leq 16$ and proved for $k \leq 3$.

3. Types B, C (and D)

In the other classical Lie types we start with an ambient vector space $\mathbb{C}^N$ equipped with a nondegenerate bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$. It is symmetric in type B, with N odd, $N = 2n+1$, and skew-symmetric in type C, with N even, $N = 2n$. (We will not discuss type D the case of symmetric bilinear form with N even, where there is also an analogous story.)

We have the Grassmannians of $(n-k)$-dimensional spaces, isotropic for $\langle\ ,\ \rangle$:

$$OG(n-k, 2n+1) \text{ in type } B, \text{ with } \int_{\text{line}} c_1(T_X) = n+k$$

and

$$IG(n-k, 2n) \text{ in type } C, \text{ with } \int_{\text{line}} c_1(T_X) = n+k+1.$$

The cases of maximal isotropic Grassmannians ($k = 0$) have received special attention, both classically and in the quantum setting. But for $k \geq 1$, much less is known about these Grassmannians. Classically we have no Giambelli formulas, and a Pieri formula was recently discovered by Pragacz and Ratajski [**PR96**]. We have quantum Pieri formulas (work in progress with Buch and Tamvakis). For OG,

$$\sigma_p * \sigma_\lambda = \sigma_p \cup \sigma_\lambda + (\sigma_p * \sigma_\lambda)_1 q + (\sigma_p * \sigma_\lambda)_2 q^2$$

where the degree 1 quantum correction term comes from the classical Pieri formula on $OG(n-k+1, 2n+1)$ and where there is also a degree 2 correction term, coming from the identity $\sigma_{n+k}^2 = q^2$ in $QH^*(OG)$. For IG,

$$\sigma_p * \sigma_\lambda = \sigma_p \cup \sigma_\lambda + (\sigma_p * \sigma_\lambda)_1 q,$$

where there is just a single quantum correction term; it comes from classical Pieri on the bigger isotropic Grassmannian $IG(n-k+1, 2n+2)$.

References

[Ber97] A. Bertram – Quantum Schubert calculus, *Adv. Math.* **128** (1997), no. 2, 289–305.

[BKT03] A. S. Buch, A. Kresch & H. Tamvakis – Gromov-Witten invariants on Grassmannians, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, 901–915.

[KTW04] A. Knutson, T. Tao & C. Woodward – The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, 19–48.

[PR96] P. Pragacz & J. Ratajski – A Pieri-type theorem for Lagrangian and odd orthogonal Grassmannians, *J. Reine Angew. Math.* **476** (1996), 143–189.

[Wit95] E. Witten – The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 357–422.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 27–30
Universität Göttingen, 2003-04

BRAUER GROUPS AND ALGEBRAIC STACKS

A. Kresch
Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, U.K.
E-mail : kresch@maths.warwick.ac.uk

Abstract. We describe the connection between Brauer groups and algebraic stacks, with application in algebraic geometry.

1. Introduction

Let K be a field. Recall that the Brauer group of K is

$$\mathrm{Br}(K) = \{\text{central simple algebras}/K\}/\sim .$$

Grothendieck generalized this concept to schemes. For X a scheme,

$$\mathrm{Br}(X) = \{\text{sheaves of Azumaya algebras}/X\}/\sim .$$

When X is smooth over a field k, we have

$$\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(k(X)).$$

The notion of algebraic stacks appeared in papers by Deligne and Mumford [**DM69**] and Artin [**Art74**].

October 29th, 2003.

Example 1.1.

- Orbifolds $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i/G_i$, where U_i are schemes and G_i are finite groups acting effectively.
- Orbifold curves: start with a curve C nonsingular over k, points p_i and natural numbers d_i, and get X by glueing $C \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ with D/μ_{n_i}, $i = 1, \ldots, k$.

Maps to X are required to factor locally through one of the U_i's. Here are some surface examples:

- $[\mathbb{A}^2/\mu_2]$, action by $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2)$ gives a quadric cone with a $\mathbb{Z}/2$-orbifold point at vertex; it is smooth *as a stack*.
- $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ the standard affine open covering $U_i \cong \mathbb{A}^2$. Now cover $\mathbb{P}^2$ by U_0, $U_1 \cong \mathbb{A}^2/\mu_2$, and $U_2 \cong \mathbb{A}^2/\mu_2$, where each μ_2 acts by $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$. We get a $\mathbb{P}^2$ with an orbifold structure along the line at infinity. In this example there is a different stack structure over the line at infinity than just $\mathbb{P}^1 \times B(\mathbb{Z}/2)$.

On stacks, points have stabilizer groups attached to them. Many stacks come from moduli problems, such as $\mathscr{M}_g$, where points correspond to isomorphism classes of genus g curves. Then the stabilizer group attached to a point is the automorphism group of the corresponding curve. *Artin stacks* allow infinite groups as stabilizer groups (e.g., $GL_n(k)$). *Deligne-Mumford stacks* restrict to finite groups (which as group schemes must be unramified as well, i.e., in characteristic p no α_p, μ_p, etc.) The stack is called a *gerbe* if the stabilizer group is nonvarying.

Example 1.2.

- BG is a gerbe over a point.
- There are two (isomorphism classes of) $\mathbb{Z}/2$-gerbes over $\mathbb{P}^1$.

More generally, $\mathbb{Z}/2$-gerbes over X are classified by $H^2_{et}(X, \mathbb{Z}/2)$.

Consider "$\mathbb{G}_m$-banded" gerbes, classified by $H^2(-, \mathbb{G}_m)$. The cohomological interpretation of $\mathrm{Br}(X)$ is:

$$\mathrm{Br}(X) \to H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m).$$

2. Stacks in algebraic geometry

An early application of stacks in algebraic geometry was given by Deligne and Mumford. They proved the irreducibility of $\mathscr{M}_g$ over an arbitrary ground field. This had been previously known in characteristic 0 (classically) and characteristic $p > g + 1$ [**Ful69**]. Deligne and Mumford gave 2 proofs, one without and one with stacks. The stack-based proof uses $\mathscr{M}_g \subset \overline{\mathscr{M}}_g$, a compactification which is smooth and proper over $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, plus a theorem about connectedness of fibers.

A more modern application of stacks in algebraic geometry used the Brauer group. An old question is whether the natural (injective) homomorphism

$$\mathrm{Br}(X) \to H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m)^{tors}$$

is surjective.

Proposition 2.1. [**EHKV01**] *The answer is no, in general. A counterexample is given by taking X to be a nonseparated union of two quadric cones.*

There is an element in $H^2_{et}(X, \mathbb{Z}/2)$, such that the corresponding gerbe on X has no nontrivial vector bundles. But to give a sheaf of Azumaya algebras on X is the same as to give a vector bundle on the gerbe such that the stabilizer action on fibers is nontrivial.

For $\mathbb{G}_m$-gerbes, coherent sheaves split naturally into subsheaves indexed by $\widehat{\mathbb{G}}_m$ (this is behind the language of "α-twisted sheaves", or B-fields in the physics literature, where α is a 2-cocycle with values in $\mathbb{G}_m$).

***Theorem 2.2* (Gabber).** *If X is quasi-projective then*

$$\mathrm{Br}(X) = H^2(X, \mathbb{G}_m)^{tors}.$$

A proof was recently given by de Jong using the language of α-twisted sheaves.

An application of Brauer groups to the global geometry of stacks relates to enumerative geometry. Mumford [**Mum83**] laid the foundations to enumerative geometry on the moduli space of curves of genus g via $A^*(\overline{\mathscr{M}}_g)_{\mathbb{Q}}$, Chow groups with rational coefficients, with an intersection product. This used the existence of a finite flat cover by a Cohen-Macaulay scheme. Even though $\overline{\mathscr{M}}_g$ is a singular variety, it is smooth as a (Deligne-Mumford) stack.

A simplification would have been possible if one knew the existence of a finite flat cover of $\overline{\mathscr{M}}_g$ by a *smooth* scheme. Such covers have subsequently been shown to exist, by Looijenga [**Loo94**] and Pikaart-de Jong [**PdJ95**]. This turns out to be a general phenomenon.

***Theorem 2.3* (K.-Vistoli).** *Let F be a Deligne-Mumford stack, smooth and separated over a field k. Assume further that F is* generically tame *(in characteristic p, no generic stabilizer group has order divisible by p) and that the underlying coarse moduli space is a quasi-projective scheme. Then we have $F \cong [U/G]$ for some smooth scheme U and algebraic group G acting properly on U.*

***Theorem 2.4* (K.-Vistoli).** *If $F \cong [U/G]$, the stack quotient of an algebraic group acting properly on a smooth scheme, with quasi-projective coarse moduli space, then there is a smooth scheme with a finite flat surjective map to F.*

The proof of Theorem 2.3 uses Brauer groups, plus a general stack construction which lets us "forget" the generic stabilizer, meaning that F is a gerbe over an orbifold F'. Then we reduce to proving $F \cong [U/G]$ when F is a tame gerbe over a quasi-projective scheme. This uses Theorem 2.2 and the connection between Azumaya algebras and vector bundles on a gerbe.

References

[Art74] M. Artin – Versal deformations and algebraic stacks, *Invent. Math.* **27** (1974), 165–189.

[DM69] P. Deligne & D. Mumford – The irreducibility of the space of curves of given genus, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **36** (1969), 75–109.

[EHKV01] D. Edidin, B. Hassett, A. Kresch & A. Vistoli – Brauer groups and quotient stacks, *Amer. J. Math.* **123** (2001), no. 4, 761–777.

[Ful69] W. Fulton – Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Ann. of Math. (2)* **90** (1969), 542–575.

[Loo94] E. Looijenga – Smooth Deligne-Mumford compactifications by means of Prym level structures, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no. 2, 283–293.

[Mum83] D. Mumford – Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, Arithmetic and geometry, Vol. II, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 271–328.

[PdJ95] M. Pikaart & A. J. de Jong – Moduli of curves with non-abelian level structure, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, 483–509.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 31–36
Universität Göttingen, 2003-04

CYCLES ON POWERS OF QUADRICS

N. A. Karpenko
Laboratoire des Mathématiques, Université d'Artois, rue Jean Souvraz SP 18, 62307 Lens Cedex, France • *E-mail :* karpenko@euler.univ-artois.fr

Abstract. For a projective quadric X, we describe some relative cellular structures on the powers of X. As a consequence, we compute the Chow groups of powers of X in terms of the Chow groups of powers of the anisotropic part of X, without reference to motives. Here we do not assume that the characteristic of the base field differs from 2.

1. Cellular spaces

These are notes of a part of my lectures on [**Kar03**] given at the University of Göttingen during the first week of November 2003.

Let F be a field. By a *variety* (over F) we mean a reduced (not necessarily irreducible) scheme of finite type over F.

Definition 1.1. A variety X together with a decomposition $X = \cup_{i \in I} C_i$ into a finite disjoint union of its locally closed subvarieties is called a *cellular space*, if every C_i is isomorphic to an affine space and the subvarieties C_i are the successive difference of some filtration of X by closed subvarieties.

November 3rd, 2003.

Example 1.2. To show that the condition on existence of the filtration in the definition of cellular space is not automatic, let us take as X the union of two rational conics L_1 and L_2 intersecting in two points P_1 and P_2. The locally closed subvarieties $C_i = L_i \setminus P_i$, $i \in I = \{1, 2\}$ of X satisfy all the conditions of Definition 1.1 except the filtration one. The filtration condition is not satisfied because none of the C_i is closed in X.

Example 1.3. The standard filtration of a projective space $\mathbb{P}^n$ by its linear subspaces $\mathbb{P}^{n-1}$, $\mathbb{P}^{n-2}$, and so on, produces a cellular structure on $\mathbb{P}^n$.

Example 1.4. Let D be a non-negative integer and X a D-dimensional split smooth projective quadric. Up to isomorphism, X is the hypersurface in the projective space $\mathbb{P}^{D+1}$, given by the equation $x_0x_{d+1} + \cdots + x_dx_{2d+1} = 0$ (for even $D = 2d$) or by the equation $x_0x_{d+1} + \cdots + x_dx_{2d+1} + x^2 = 0$ (for odd $D = 2d+1$). Consider the descending filtration of X by the closed subvarieties $X^{(i)}$, $i = -1, 0, \ldots, 2d+2$ with $X^{(-1)} = X$ and with $X^{(i)}$ for $i \geqslant 0$ defined inside of $X^{(i-1)}$ by the equation $x_i = 0$. This filtration produces a cellular structure on X (every successive difference is easily seen to be isomorphic to an affine space). Note that $X^{(d)}$ is $\mathbb{P}^d$ (the equation $x = 0$ in the case of odd D is automatically added because $X^{(d)}$, being a subvariety, should be reduced) and the filtration on $X^{(d)}$ coincides with that of Example 1.3.

Remark 1.5. Every split projective homogeneous variety has a cellular structure (see [**Köc91**]). And of course every projective homogeneous variety becomes split over an appropriate extension of the base field (for instance, over the algebraic closure).

Example 1.6. Let X and Y be cellular spaces with the cellular decompositions $X = \cup_{i\in I} U_i$ and $Y = \cup_{j\in J} V_j$. Then the direct product $X \times Y$ is cellular as well with the cells $U_i \times V_j$, $(i, j) \in I \times J$. Indeed, the products $U_i \times V_j$ are isomorphic to affine spaces, locally closed in $X \times Y$, disjoint, and cover $X \times Y$. The filtration condition is easy to verify (see, e.g., [**Kar00**, §7]).

The total integral Chow group $\mathrm{CH}(X)$ of a cellular space X is easy to compute:

Theorem 1.7. *Let X be a cellular space with cells U_i, $i \in I$. Write u_i for the element in $\mathrm{CH}(X)$ given by the closure of the cell U_i. The Chow group $\mathrm{CH}(X)$ is a free $\mathbb{Z}$-module and u_i, $i \in I$ is its basis.*

Proof. Let

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \cdots \supset X^{(n)} \supset X^{(n+1)} = \emptyset$$

be a cellular filtration of X. We prove the statement using an induction on its length. Let U be the cell $X^{(0)} \setminus X^{(1)}$ and let u be the corresponding element of $\mathrm{CH}(X)$. By the induction hypothesis, the $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{CH}(X^{(1)})$ is free and the elements u_i, given by the cells U_i different from U, form its basis. On the other hand, in the exact sequence of K-homology groups

$$H(X, K_1) \to H(U, K_1) \to \mathrm{CH}(X^{(1)}) \to \mathrm{CH}(X) \to \mathrm{CH}(U) \to 0$$

the left hand side homomorphism is evidently surjective (because the pull-back $H(F, K_1) \to H(U, K_1)$ with respect to the structure morphism of U is an isomorphism by the homotopy invariance of K-cohomology) and the right hand side epimorphism has a splitting $\mathrm{CH}(U) = \mathbb{Z} \cdot [U] \to \mathrm{CH}(X)$ given by $[U] \mapsto u$. □

Remark 1.8. The classes $[X^{(i)}]$, $i = 0, 1, \dots, n$ of the terms of a cellular filtration

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \cdots \supset X^{(n)} \supset X^{(n+1)} = \emptyset$$

of a given cellular space X also form a basis of $\mathrm{CH}(X)$ (one can either deduce it from Theorem 1.7 or repeat the proof of the theorem replacing the splitting $[U] \mapsto u$ by the splitting $[U] \mapsto [X]$).

Remark 1.9. Let $X = \cup_{i \in I} U_i$ and $Y = \cup_{j \in J} V_j$ be cellular spaces with their cellular decompositions, $u_i \in \mathrm{CH}(X)$ and $v_j \in \mathrm{CH}(Y)$ the elements given by the closures of the cells. Note that the class in $\mathrm{CH}(X \times Y)$ of the closure of a cell $U_i \times V_j$ coincides with the class of the product of the closures of the cells (even in the case when this product is not reduced), that is, with the external product $u_i \times v_j$. Therefore the external products $u_i \times v_j$, $(i, j) \in I \times J$, form a basis of $\mathrm{CH}(X \times Y)$, and the homomorphism $\mathrm{CH}(X) \otimes \mathrm{CH}(Y) \to \mathrm{CH}(X \times Y)$, given by the external product of cycles, is an isomorphism.

Now we get the following description of the Chow ring of a smooth split projective quadric:

Theorem 1.10. *Let X be a split smooth D-dimensional projective quadric, a hypersurface of a projective space $\mathbb{P}$. Set $d = [D/2]$ and let $h \in \mathrm{CH}^1(X)$ be the class of a hyperplane section of X. For $i = 0, 1, \dots, d$, let $l_i \in \mathrm{CH}_i(X)$ be the class of an arbitrary i-dimensional linear subspace of $\mathbb{P}$ lying inside of X. Then the total Chow group $\mathrm{CH}(X)$ is free with basis h^i, l_i, $i = 0, 1, \dots, d$. The multiplication of the ring $\mathrm{CH}(X)$ is determined by the following rules: $h^{d+1} = 2l_{[(D-1)/2]}$ ($h^{d+1} = 0$ for $D = 0$), $h \cdot l_i = l_{i-1}$ for $i \in [1,\ d]$, and l_d^2 is equal to 0 or l_0 with $l_d^2 = l_0$ if and only if D is divisible by 4.*

*Proof***.** For $D = 0$, the variety X is a disjoint union of two rational points. For $D = 1$, the variety X is isomorphic to a projective line. In both cases the statement of Theorem needs no proof. We now assume that $D \geqslant 2$.

The intersection of an arbitrary hyperplane of $\mathbb{P}$ with X is reduced and has codimension 1 in X; therefore the pull-back of the class in $\mathrm{CH}(\mathbb{P})$ of the hyperplane coincides with the class of this intersection; in particular, it does not depend on the choice of the hyperplane. Since the pull-back $\mathrm{CH}(\mathbb{P}) \to \mathrm{CH}(X)$ is a ring homomorphism, any power h^i is the pull-back of the class of an i-codimensional linear subspace of $\mathbb{P}$. It follows that for $i = 0, 1, \dots, d$ the elements h^i are the classes of the first $d+1$ terms of the cellular filtration of X constructed in Example 1.4. The remaining $d+1$ terms are certain linear subspaces X_i of X, one for each dimension $i = d, d-1, \dots, 0$. Since $\mathrm{CH}_i(X) = \mathbb{Z} \cdot [X_i]$ for $i \in [0,\ D/2)$, the push-forward homomorphism $\mathrm{CH}_i(X) \to \mathrm{CH}_i(\mathbb{P})$ is injective (even bijective) for such i; it follows that $[X_i]$ coincides with the class of an arbitrary i-dimensional linear subspace lying on X. At this stage it is already easy to get the relation $h \cdot l_i = l_{i-1}$ using the projection formula with respect to the embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}$.

In contrast to the other graded components of the Chow group of X, the group $\mathrm{CH}_d(X)$ in the case of even D (and only in this case) has a rank different from 1 (namely, 2): its basis is formed by $h^d = [X^{(d-1)}]$ and $l_d = [X^{(d)}]$, where l_d is the class of the special linear subspace $X^{(d)} \subset X$. Let $l'_d \in \mathrm{CH}_d(X)$ be the class of an arbitrary d-dimensional linear subspace of X. Since l_d and l'_d have the same image under the push-forward homomorphism $\mathrm{CH}_d(X) \to \mathrm{CH}_d(\mathbb{P})$ while its kernel is generated by $h^d - 2l_d$, one has $l'_d = l_d + n(h^d - 2l_d)$ with some $n \in \mathbb{Z}$. Since there exists a linear automorphism of X moving l_d to l'_d (while h^d is of course invariant with respect to any linear automorphism), the cycles h^d and l'_d also form a basis of $\mathrm{CH}_d(X)$; consequently, the determinant of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1-2n \end{pmatrix}$$

is ± 1, that is, n is 0 or 1 and l'_d is l_d or $h^d - l_d$. So, there are at most two different rational equivalence classes of d-dimensional linear subspaces of X and their sum is equal to h^d.

Now let l'_d be the class of the linear subspace $x_0 = x_1 = \cdots = x_{d-1} = x_{2d+1} = 0$. Since $X^{(d-1)}$ is the union of $x_0 = x_1 = \cdots = x_{d-1} = x_d = 0$ and $x_0 = x_1 = \cdots = x_{d-1} = x_{2d+1} = 0$, we have $h^d = l_d + l'_d$, that is, the classes l_d and l'_d are different. It follows that the class of $x_{d+1} = x_{d+2} = \cdots = x_{2d+1} = 0$ is l'_d if and only if D is divisible by 4; in this case $l_d \cdot l'_d = 0$ and consequently $l_d^2 = l_d \cdot (h^d - l'_d) = l_d \cdot h^d = l_0$; otherwise $l_d^2 = 0$. □

2. Relative cellular spaces

The notion of a relative cellular space was introduced in [**Kar00**, §6]. Here we slightly change the definition.

Definition 2.1. A variety X together with a decomposition $X = \cup_{i \in I} C_i$ into a finite disjoint union of its locally closed subvarieties equipped with morphisms $f_i : C_i \to X_i$ to some smooth projective X_i is called a *relative cellular space*, if the subvarieties C_i are the successive differences of some filtration of X by closed subvarieties and for every $i \in I$ the morphism f_i is flat of constant relative dimension and all its fibers are isomorphic to affine spaces. We refer to C_i as to the cells of X and to X_i as to the bases of the cells.

Example 2.2 **(The trivial example).** Any smooth projective variety can be considered as a relative cellular space in the trivial way: one cell coinciding with its base.

Example 2.3 **(The basic example).** Let X be a D-dimensional isotropic smooth projective quadric. Up to an isomorphism, X is the hypersurface of $\mathbb{P}^{D+1}$ given by the equation $x_0 x_1 + \psi(x_2, \dots, x_{D+1}) = 0$ with some quadratic form ψ. We define a filtration $X = X^{(-1)} \supset X^{(0)} \supset X^{(1)}$. The subvariety $X^{(0)}$ is defined by the equation $x_0 = 0$. It is a 1-dimensional cone over the smooth projective quadric X_0 given by ψ; we take as $X^{(1)}$ the vertex of the cone (i.e., the point $x_0 = x_2 = x_3 \cdots = x_{D+1} = 0$). This filtration determines a relative cellular structure on X. Indeed, $X^{(-1)} \setminus X^{(0)}$ is an affine space, $X^{(0)} \setminus X^{(1)}$ is a 1-dimensional vector bundle over X_0, and $X^{(1)}$ is a point.

More generally, if X is given by the equation

$$x_0 x_1 + \dots x_{2i-2} x_{2i-1} + \psi(x_{2i}, \dots, x_{D+1}) \ ,$$

then X has a structure of relative cellular space with the smooth quadric $\psi = 0$ being the base of one cell and points being the bases of the other cells.

Remark 2.4. Every isotropic projective homogeneous variety has a non-trivial structure of cellular space, see [**CGM**].

Example 2.5 **(Product of cellular spaces).** The direct product of two cellular spaces is a cellular space, where the cells are the pairwise products of the cells; their bases are products of the bases of the factors.

The Chow group of a relative cellular space is computed in [**Kar00**] in terms of the Chow groups of the bases of its cells:

Theorem 2.6 **(**[**Kar00**, proof of Th. 6.5]**).** *With notations of Definition 2.1, the sum of the homomorphisms* $(\Gamma_{f_i})_* : \mathrm{CH}(X_i) \to \mathrm{CH}(X)$*, given by the closures* $\Gamma_{f_i} \subset X_i \times X$ *of the transpositions of the graphs of the morphisms* $f_i : C_i \to X_i$*, gives an isomorphism*

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{CH}(X_i) \simeq \mathrm{CH}(X).$$

Remark 2.7. For an integral closed subvariety $Z \subset X_i$, the element of $\mathrm{CH}(X)$ corresponding to $[Z] \in \mathrm{CH}(X_i)$ under the isomorphism of Theorem 2.6 is given by the closure in X of $f_i^{-1}(Z)$.

References

[CGM] V. Chernousov, S. Gille & A. Merkurjev – Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties, to appear in *Duke Math. J*, year = 2003,.

[Kar00] N. A. Karpenko – Cohomology of relative cellular spaces and of isotropic flag varieties, *Algebra i Analiz* **12** (2000), no. 1, 3–69.

[Kar03] ———, Holes in I^n, 2003, Linear Algebraic Groups and Related Structures, Preprint Server, **128**, 1–29.

[Köc91] B. Köck – Chow motif and higher Chow theory of G/P, *Manuscripta Math.* **70** (1991), no. 4, 363–372.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 37–41
Universität Göttingen, 2003-04

STABLE REDUCTION OF MODULAR CURVES

I. I. Bouw
IEM, Universität GH Essen, Ellernstrasse 29, D-45326 Essen, Germany
E-mail : bouw@exp-math.uni-essen.de

Abstract. I report on progress towards computing the stable reduction of the modular curve $X(p^n)$ to characteristik $p > 2$. This is joint work with Stefan Wewers.

1. Introduction

These are the notes of a talk given in the *algebraic geometry seminar* in Göttingen, on September 5th, 2003. I report on joint work with Stefan Wewers (in preparation).

Let $p > 2$ be a prime number. We fix a compatible system $\zeta_{p^n} \in \mathbb{C}$ of primitive p^nth roots of unity. Let $X(p^n) = \mathbb{H}^*/\Gamma(p^n)$ be the modular curve of full level p^n over $\mathbb{C}$. Here $\mathbb{H}^*$ is the complete upper half plane, and

$$\Gamma(p^n) = \{A \in \mathrm{SL}_2(p^n) \mid A \equiv \mathrm{I} \bmod p^n\}.$$

Recall that $X(p^n)$ parameterizes (generalized) elliptic curves E with a full level p^n-structure, i.e. an isomorphism $\varphi : (\mathbb{Z}/p)^2 \to E[p^n]$ with $\det(\varphi) = \zeta_{p^n}$. We obtain a cover $\pi_n : X(p^n) \to X(1) \simeq \mathbb{P}^1_j$ by sending (E, φ) to $j(E)$. The cover

November 5th, 2003.

π_0 is a Galois cover, with Galois group $G_n \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n)/(\pm \mathrm{I})$. It is branched at $j = 0, 1728, \infty$ of order $3, 2, p$, respectively. The cover π_n together with the Galois action can be defined over $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$.

The problem we discuss in this talk is to determine the stable reduction of $\pi_n \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\zeta_{p^n})$ at some prime $\wp$ of $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\zeta_{p^n})$ over p. Our main result is that we can do this for $n = 2$. We start by recalling the definition of the stable reduction of a Galois cover, following Raynaud [**Ray99**].

Let R be a complete discrete valuation ring, with residue field $k = \bar{k}$ of characteristic $p > 2$ and fraction field K of characteristic zero. Let $f : Y \to X = \mathbb{P}^1_K$ be a G-Galois cover defined over K. We assume for simplicity that $g(Y) \geqslant 2$. By the stable reduction theorem, there exists a unique stable model $\mathscr{Y}$ of Y over R, after replacing K by a finite extension. Uniqueness implies that the action of G extends to $\mathscr{Y}$, and we may define $\mathscr{X} = \mathscr{Y}/G$. We call $f_R : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ the *stable model*, and its special fiber $\bar{f} := f_R \otimes_R k : \bar{Y} \to \bar{X}$ the *stable reduction*. The cover f has *good reduction* if $\bar{f} : \bar{Y} \to \bar{X}$ is a separable cover of smooth curves. Otherwise, f has *bad reduction*.

It is easy to see that $\pi_n : X(p^n) \to X(1)$ has bad reduction to characteristic p, since an elliptic curve in characteristic p has strictly less p-torsion points in characteristic p than in characteristic zero. We denote by

$$\pi_{n,R} : \mathscr{X}(p^n) \to \mathscr{X}(1)^{(n)}$$

the stable model of π_n. The stable reduction we denote by

$$\bar{\pi}_n : \bar{X}(p^n) \to \bar{X}(1)^{(n)}.$$

Note that $X(1)$ has genus zero, hence admits a smooth model over R. The model $\mathscr{X}(1)^{(n)}$ is defined as the quotient of $\mathscr{X}(p^n)$, and is not smooth for $n > 0$. Moreover, this model depends on n. Its special fiber $\bar{X}(1)^{(n)}$ is a tree of projective lines. If n is understood, we write $\bar{X}(1)$ instead of $\bar{X}(1)^{(n)}$.

2. The Katz–Mazur model

Katz and Mazur defined in [**KM85**] a regular model $\mathscr{X}(p^n)^{\mathrm{KM}}$ of $X(p^n)$ over $A = \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]$. Its special fiber $\bar{X}(p^n)^{\mathrm{KM}}$ is a union of smooth curves intersecting above the *supersingular points*. Here we call $j \in \bar{X}(1)^{\mathrm{KM}} \simeq \mathbb{P}^1_j$ supersingular if the elliptic curve E with j-invariant j is supersingular. This model is not semistable: $\bar{X}(p^n)^{\mathrm{KM}}$ has a bad singularity over the supersingular j's. In some sense, one does not see the "interesting" irreducible representations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n)$ in the cohomology on the Katz–Mazur model, since they correspond to the vanishing cycles. This is one of the motivations for studying the stable model of $X(p^n)$.

The stable reduction of $X(p)$ is known. It follows by combining the work of Edixhoven [**Edi90**] on the stable reduction of $X_0(p^2)$ with the results of Katz and Mazur. Here one uses the fact that $X_0(p^2)$ is a quotient of $X(p)$.

In [**BW02**], we give an alternative proof of this fact, which does not use the fact that $X(p)$ is a moduli space. Instead, this proof relies on the fact that $\pi_1 : X(p) \to X(1)$ is a Galois cover of $\mathbb{P}^1$ branched at three points, such that the order of the Galois group is strictly divisible by p. In this situation, we have a strong result on the structure of the stable reduction, due to Raynaud [**Ray99**] and Wewers [**Wew03**].

It seems very difficult to generalize this approach to $X(p^n)$, since the Sylow p-subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n)/\pm \mathrm{I}$ is nonabelian. It is not clear what to expect for the stable reduction of G-Galois covers if G has a nonabelian Sylow p-subgroup. As far as we know, our result on the stable reduction of $\pi_2 : X(p^2) \to X(1)$ is the first example in this direction. This is the second motivation for looking at the stable reduction of modular curves.

3. The local moduli problem

In this section we give a new proof for the stable reduction of $X(p)$, which generalizes to $X(p^2)$. We are also working on the general case.

Let $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, $R = W(k)$ and let K be the fraction field of R. We denote by ν the valuation on K with $\nu(p) = 1$. Let $F_0(X, Y) = X + Y + \cdots \in k[[X, Y]]$ be the unique formal group law over k of height two, such that $[p]_{F_0}(X) = X^{p^2}$. We choose a (supersingular) elliptic curve E_0 over k, with formal group law F_0. Let $j_0 = j(E_0)$.

We denote by $\mathscr{X}(1)^{\mathrm{loc}}$ the universal deformation space of F_0. Lubin–Tate theory implies that

$$\mathscr{X}(1)^{\mathrm{loc}} \simeq \mathrm{Spf}\, R[[u]].$$

Let $F(X, Y) \in R[[u]][[X, Y]]$ be the universal deformation of F_0.

Lemma 3.1. *We may assume that*

$$[p]_F X \equiv pX + uX^p + X^{p^2} \pmod{pX^p}.$$

The lemma follows from Lubin–Tate theory. Write $X(1)^{\mathrm{loc}} = \mathscr{X}(1)^{\mathrm{loc}} \otimes K$. This is a open unit disk with parameter u. Consider

$$[p^n]_F(X) = [p]_F \circ \cdots \circ [p]_F(X) = 0. \tag{1}$$

We define a cover $X(p^n)^{\mathrm{loc}} \to X(1)^{\mathrm{loc}}$ by adjoining all solution of (1). More precisely, $X(p^n)^{\mathrm{loc}}$ parameterizes triples (u, x_n, y_n), with $u \in X(1)^{\mathrm{loc}}$ and (x_n, y_n)

a basis of $F_u[p^n]$ over K such that $e_n(x_n, y_n) = \zeta_{p^n}$. Here e_n is the Weil pairing on $F_u[p^n]$.

Serre–Tate theory says that a deformation of a formal group F_0 of E_0 corresponds to a deformation of E_0. Therefore, we obtain the following diagram

$$\begin{tikzcd} X(p^n)^{\mathrm{loc}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n)"'] & X(p^n) \arrow[d, "\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n)/(\pm \mathrm{I})"] \\ X(1)^{\mathrm{loc}} \arrow[r] & X(1). \end{tikzcd}$$

Here the upper horizontal arrow is 2:1 on its image, and the lower horizontal arrow is injective.

We define a closed rigid disk $D \subset X(1)^{\mathrm{loc}}$ by

$$D = \{u \in X(1)^{\mathrm{loc}} \mid \nu(u) \leqslant p/(p+1)\}.$$

Let $u \in D$, and choose $(u, x_1, y_1) \in X(p)^{\mathrm{loc}}$. Considering the Newton polygon of $[p]_F(X)$, one checks that $\nu(x_1) = \nu(y_1) = 1/(p^2-1)$. In other words, the disk D consists of u such that the p-torsion $F_u[p]$ of the corresponding formal group law does not admit a canonical subgroup. This disk is called the *too supersingular disk*.

Now

$$-u \equiv x_1^{p(p-1)} + \frac{p}{x_1^{p-1}} \equiv y_1^{p(p-1)} + \frac{p}{y_1^{p-1}} \pmod{u^{1+\varepsilon}}.$$

Note that all terms have equal valuation. Multiplying by $x_1^p y_1^p$ yields

$$y_1^{p^2} x_1^p - x_1^{p^2} y_1^p \equiv p(y_1^p x_1 - x_1^p y_1).$$

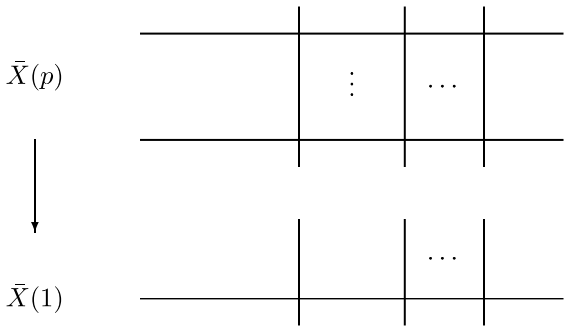
Writing

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{p^{1/(p^2-1)}} \pmod{p}, \qquad \tilde{y}_1 = \frac{y_1}{p^{1/(p^2-1)}} \pmod{p},$$

multiplying by the correct power of p, and reducing gives

$$\tilde{y}_1^p \tilde{x}_1 - \tilde{y}_1 \tilde{x}_1^p \equiv 1. \tag{2}$$

It is easy to see that (2) defines a $\mathrm{PSL}_2(p)$-cover of $\mathbb{P}^1_k$, of genus $p(p-1)/2$. Our argument shows that the stable reduction $\bar{X}(p)$ contains one such component for each supersingular j-value. Since $\bar{X}(p)$ dominates $\bar{X}(p)^{\mathrm{KM}}$, we also know that $\bar{X}(p)$ contains $p+1$ so called Igusa curves Y. The projection $Y \to \mathbb{P}^1_j$ factors as $Y \to Z \to \mathbb{P}^1_j$, where $Y \to Z$ is a inseparable map of degree p given by the Frobenius morphism. The map $Z \to \mathbb{P}^1_j$ is a $(p-1)/2$-cyclic cover totally branched at the supersingular j-values; it corresponds to taking the $(p-1)/2$th root out of the Hasse invariant.



It is easy to check that these are all irreducible components of $\bar{X}(p)$. Summarizing, we obtain the following picture.

The vertical components of $\bar{X}(p)$ satisfy (2). The horizontal ones are the Igusa curves. The curve $\bar{X}(p)^{\mathrm{KM}}$ is obtained from $\bar{X}(p)$ by contracting the vertical components.

References

[BW02] I. Bouw & S. Wewers – Stable reduction of modular curves, 2002, `math.AG/0210363`.

[Edi90] B. Edixhoven – Minimal resolution and stable reduction of $X_0(N)$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40** (1990), no. 1, 31–67.

[KM85] N. M. Katz & B. Mazur – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, vol. 108, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[Ray99] M. Raynaud – Spécialisation des revêtements en caractéristique $p > 0$, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 1, 87–126.

[Wew03] S. Wewers – Three point covers with bad reduction, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, 991–1032.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 43–49
Universität Göttingen, 2003-04

EINE WUNDERBARE KOMPAKTIFIZIERUNG DER ALLGEMEINEN LINEAREN GRUPPE: DEFINITION UND ANWENDUNGEN

I. Kausz
NWF I - Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany
E-mail : ivan.kausz@mathematik.uni-regensburg.de

Abstract. We study certain compactifications of the general linear group and some of their applications.

1. Definition und Eigenschaften von $\mathbf{KGL}_n$

Sei k ein Körper und seien E, F n-dimensionale k-Vektorräume. Setze

$$X^{(0)} := \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(E, F) \oplus k).$$

Man hat ein Diagramm von abgeschlossenen Unterschemata in $X^{(0)}$:

$$\begin{tikzcd}
Y_0^{(0)} \arrow[r, hook] & Y_1^{(0)} \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & Y_{n-1}^{(0)} & \\
 & Z_{n-1}^{(0)} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & Z_1^{(0)} \arrow[u] \arrow[r, hook] & Z_0^{(0)}.
\end{tikzcd}$$

November 10th, 2003.

Hierbei ist

$$\begin{aligned} Y_r^{(0)} &= \{(f:a) \in X^{(0)} \mid \mathrm{rk}\,(f) \leqslant r\} \\ Z_{n-r}^{(0)} &= \{(f:a) \in Y_r^{(0)} \mid a = 0\}. \end{aligned}$$

Betrachte folgende sukzessive Aufblasungen:

$$X^{(0)} \longleftarrow X^{(1)} \longleftarrow X^{(2)} \longleftarrow \cdots \longleftarrow X^{(n-1)}$$

wobei $X^{(0)} \leftarrow X^{(1)}$ die Aufblasung von $X^{(0)}$ entlang der disjunkten glatten Unterschemata $Y_0^{(0)}$ und $Z_{n-1}^{(0)}$, $X^{(1)} \leftarrow X^{(2)}$ die Aufblasung von $X^{(1)}$ entlang der disjunkten glatten Unterschemata $Y_1^{(1)}$ und $Z_{n-2}^{(1)}$ (den eigentlichen Transformierten von $Y_1^{(0)}$ und $Z_{n-2}^{(0)}$) u.s.w. und schliesslich $X^{(n-2)} \leftarrow X^{(n-1)}$ die Aufblasung von $X^{(n-2)}$ entlang der disjunkten glatten Unterschemata $Y_{n-2}^{(n-2)}$ und $Z_1^{(n-2)}$ ist.

Setze $\mathrm{KGL}_n := X := X^{(n-1)}$. Dann gilt:

- X ist glatt und projektiv.
- $\mathrm{GL}_n \cong \mathrm{Isom}(E, F) \subset X$ ist offen und das Komplement ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen und irreduziblen Komponenten

  $$Y_0, \ldots, Y_{n-1}, Z_0, \ldots, Z_{n-1}$$

  (den sukzessiven eigentlichen Transformierten der $Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$).
- Die Gruppe $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$ operiert of X. Die Abschlüsse der Bahnen sind von der Gestalt

  $$\overline{\mathbf{O}}_{I,J} = \bigcap_{i \in I} Z_i \cap \bigcap_{j \in J} Y_j$$

  wo $\min(I) + \min(J) \geqslant n$.
- Es gilt $\overline{\mathbf{O}}_{I,J} \cong P_1 \times_{\mathbf{Fl}} \cdots \times_{\mathbf{Fl}} P_r \times_{\mathbf{Fl}} K'$, wo
  - **Fl** das Produkt zweier Flaggen-Varietäten,
  - $P_i \to \mathbf{Fl}$ lokal triviale Faserung mit Faser $\overline{\mathrm{PGL}_{n_i}}$ (der wunderbaren Kompaktifizierung von PGL_{n_i})
  - $K' \to \mathbf{Fl}$ lokal triviale Faserung mit Faser $\mathrm{KGL}_{n'}$,

  wobei die Zahlen r, n_i, n' von I, J abhängen.

Für weitere Eigenschaften siehe [**Kau00**].

2. Gieseker Vektorbündel

Betrachte eine Kette $R = \bigcup_i R_i$ von projektiven Geraden: $x_0 \in R_1, R_i \cap R_{i+1} = x_i \neq x_{i-1}$, für $i = 1, \dots, r-1$, mit $x_{r-1} \neq x_r \in R_r$.

Definition 2.1. Ein Vektorbündel $\mathscr{E}$ auf R heisst *zulässig*, falls gilt

1. $\mathscr{E}|_{R_i} \cong d_i\mathscr{O}(1) \oplus (n - d_i)\mathscr{O}$ für gewisse $d_i \geqslant 1$ $(i = 1, \dots, r)$;
2. $H^0(R, \mathscr{E}(-x_0 - x_r)) = 0$.

Bemerkung 2.2. Falls ein zulässiges Vektorbündel auf R existiert, so folgt $r \leqslant \operatorname{rk} \mathscr{E}$.

Definition 2.3. Sei C eine stabile Kurve. Ein *Gieseker Vektorbündel* auf C ist ein Paar $(C' \to C, \mathscr{E})$, wo

1. $C' \to C$ ist Isomorphismus über $C_{\text{glatt}} \subseteq C$.
2. Nicht-triviale Fasern von $C' \to C$ sind Ketten von projektiven Geraden.
3. $\mathscr{E}$ ist ein Vektorbündel auf C', dessen Einschränkung auf nicht-triviale Fasern von $C' \to C$ zulässig ist.

Sei speziell C irreduzibel mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt und sei $\tilde{C} \to C$ die Normalisierung.

Satz 2.4. **[Kaub]** *Es existiert ein kanonisches Diagramm von Moduli-Stacks*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{GVB(C)} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\nu"] & & \\ VB(\tilde{C}) & & GVB(C) & VB(C) \arrow[l, hook', "j"'] \end{tikzcd}$$

Hierbei parametrisieren $VB(C)$ bzw. $VB(\tilde{C})$ Vektorbündel von Rang n auf C bzw. $\tilde{C}$, und $GVB(C)$ parametrisiert Gieseker-Vektorbündel von Rang n auf C. Der Morphismus j ist eine offene Immersion. Der Stack $GVB(C)$ besitzt normale Überkreuzungs-Singularitäten und ist universell abgeschlossen. Der Morphismus ν identifiziert den Stack $\widetilde{GVB(C)}$ mit der Normalisierung von $GVB(C)$. Der Morphismus f ist eine lokal-triviale KGL_n-Faserung.

3. Verallgemeinerte Thetafunktionen

Sei C eine glatte projektive Kurve über $k = \mathbb{C}$. Sei $\mathscr{P}$ das universelle Bündel auf $C \times \mathrm{VB}(C)$ und sei $\pi : C \times \mathrm{VB}(C) \to \mathrm{VB}(C)$ die Projektion. Definiere das Geradenbündel $\Theta := \det R\pi_*\mathscr{P}$ auf $\mathrm{VB}(C)$. Für $\kappa \geqslant 1$ ist $H^0(\mathrm{VB}(C), \Theta^\kappa)$ ein Raum von verallgemeinerten Thetafunktionen.

Allgemeiner, sei (C, x_i) eine m-punktierte glatte projektive Kurve über $\mathbb{C}$. Ein (quasi-) parabolisches Vektorbündel auf (C, x_i) ist ein Tupel $(\mathscr{E}, F_\bullet\mathscr{E}[x_i])$, wo $\mathscr{E}$ ein Vektorbündle auf C und $F_\bullet\mathscr{E}[x_i]$ eine vollständige Flagge in der Faser von $\mathscr{E}$ bei x_i ist. Sei $\mathrm{PB} = \mathrm{PB}(C, x_i)$ der Stack, welcher parabolische Vektorbündel von Rang n auf (C, x_i) parametrisiert. Sei $(\mathscr{P}, F_\bullet x_i^*\mathscr{P})$ das universelle Objekt auf $C \times \mathrm{PB} \underset{\pi}{\overset{x_i}{\rightleftarrows}} \mathrm{PB}$. Setze

$$\Theta^\kappa(a^1, \dots, a^m) := (\det R\pi_*\mathscr{P})^\kappa \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \bigotimes_{j=1}^{n} (F_j x_i^*\mathscr{P}/F_{j-1}x_i^*\mathscr{P})^{a_j^i}$$

für $\kappa \in \mathbb{N}$ und $a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) \in \mathbb{Z}^n$. Dann kann man auch

$$H^0(\mathrm{PB}(C, x_1, \dots, x_m), \Theta^\kappa(a^1, \dots, a^m))$$

als Raum verallgemeinerter Theta-Funktionen auffassen.

Satz 3.1. [**Kaua**] *Sei C eine irreduzible projektive Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt und sei $(\tilde{C}, x_1, x_2) \to C$ die Normalisierung. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$H^0(GVB(C), \Theta^\kappa) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(a,b)\in A} H^0(PB(\tilde{C}, x_1, x_2), \Theta^\kappa(a, b))$$

wo $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \mid 0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \kappa - 1\ ,\ b_i = \kappa - a_{n-i+1}\}$.

Beweisidee: Betrachte das Diagramm

$$\mathrm{VB}(\tilde{C}) \xleftarrow{f} \widetilde{\mathrm{GVB}(C)} \xrightarrow{\nu} \mathrm{GVB}(C)$$

aus dem Satz 2.4. Da $\mathrm{GVB}(C)$ normale Überkreuzungs-Singularitäten besitzt, und ν die Normalisierungs-Abbildung ist, kann man $H^0(\mathrm{GVB}(C), \Theta^\kappa)$ mit einem Teilraum von $H^0(\widetilde{\mathrm{GVB}(C)}, \nu^*\Theta^\kappa)$ identifizieren.
Es gilt $\nu^*\Theta = f^*\tilde{\Theta} \otimes \Delta$, wo $\tilde{\Theta}$ das Theta-Bündel auf $\mathrm{GVB}(\tilde{C})$ und Δ ein Geradenbündel auf $\widetilde{\mathrm{GVB}(C)}$ ist, dessen Einschränkung auf Fasern von f ein fixes Geradenbündel Δ' auf KGL_n ist.

Zerlege $H^0(\overline{\mathbf{O}}_{I,J}, i_{I,J}^*(\Delta')^\kappa)$ in irreduzible Darstellungen von $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, wo $i_{I,J} : \overline{\mathbf{O}}_{I,J} \hookrightarrow \mathrm{KGL}_n$ die Inklusion des Bahn-Abschlusses ist. Nach dem Satz von Borel-Bott-Weil lassen sich die irreduziblen Darstellungen als Räume globaler Schnitte von gewissen Geradenbündeln auf $\mathbf{Fl} \times \mathbf{Fl}$ realisieren, wo $\mathbf{Fl}$ die vollständigen Flaggen in einem n-dimensionalen Vektorraum parametrisiert.

Dies induziert insbesondere eine Zerlegung von $f_*\nu^*\Theta^\kappa = \tilde{\Theta} \otimes f_*\Delta^\kappa$ und somit eine Zerlegung von $H^0(\widetilde{\mathrm{GVB}(C)}, \nu^*\Theta^\kappa)$.

Eine Analyse der Kombinatorik der Straten von $\widetilde{\mathrm{GVB}(C)}$ liefert schliesslich die behauptete Zerlegung von $H^0(\mathrm{GVB}(c), \Theta^\kappa)$.

4. Offene Fragen

1. Sei Y ein Schema über $\mathbb{C}$ und $X \to Y$ eine stabile Kurve über Y und $\mathrm{GVB}(X/Y)$ der Modul-Stack der Gieseker-Vektorbündel auf X über Y (von festem Rang und Grad).

Sei $\mathscr{P}_{X/Y}$ das universelle Gieseker-Vektorbündel auf $X \times_Y \mathrm{GVB}(X/Y)$,

$$\pi : X \times_Y \mathrm{GVB}(X/Y) \to \mathrm{GVB}(X/Y)$$

die Projektion und $h : \mathrm{GVB}(X/Y) \to Y$ der Struktur-Morphismus. Setze

$$\Theta_{X/Y} := \det(R\pi_*\mathscr{P}_{X/Y}) \text{ und } \mathrm{CB}_{X/Y} := h_*\Theta^\kappa_{X/Y}.$$

Vermutung 4.1. (1) *$CB_{X/Y}$ ist lokal freier $\mathscr{O}_Y$-Modul von endlichem Rang.*
(2) *$CB_{X/Y}$ trägt kanonischen projektiven Zusammenhang.*

2. Sei C/k eine irreduzible projektive Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt und sei $(u : C' \to C, \mathscr{E})$ ein Gieseker-Vektorbündel (von Rang n und Grad d) auf C. Nach Nagaraj und Seshadri ist $u_*\mathscr{E}$ eine torsionsfreie Garbe auf C.

***Definition 4.2* (Nagaraj, Seshadri).** Das Gieseker-Vektorbündel

$$(C' \to C, \mathscr{E})$$

heisst *stabil*, falls $u_*\mathscr{E}$ stabil ist.

Satz 4.3. [**NS99**], [**Ses00**] *Sei $(n, d) = 1$. Dann existiert ein projektiver Modulraum $U^s_C(n, d)$, der Isomorphie-Klassen von stabilen Gieseker-Vektorbündeln parametrisiert. Dieser hat normale Überkreuzungs-Singularitäten.*

Frage 4.4. Für $(n, d) \neq 1$ ist $U^s_C(n, d)$ nur quasi-projektiv. Was ist der richtige Begriff von "semistabilen Gieseker-Vektorbündeln", so dass $U^s_C(n, d) \subset U^{ss}_C(n, d)$ eine Kompaktifizierung?

Satz 4.5. [**Gie84**] *Sei $n = 2$, d ungerade. Dann existiert ein Diagramm von projektiven Varietäten wie folgt:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\text{lok. triv. } KGL_2\text{-Faserung}"'] & Z \arrow[l, "\text{Aufblasung}"'] \arrow[r, "\text{Aufblasung}"] & \widetilde{U^s_C(2,d)} \arrow[d, "\text{Normalisierung}"] \\
U^s_{\tilde{C}}(2,d) & & U^s_C(2,d)
\end{tikzcd}$$

Frage 4.6. Analogon für $n \geqslant 3$?

Bei hinreichender Kenntis der beteiligten Aufblasungen lässt sich mithilfe des entsprechenden Diagramms vielleicht folgende Vermutung beweisen:

Vermutung 4.7. *(Newstead, Ramanan, Earl, Kirwan,*[**New72**], [**EK99**]*) Sei X glatte projektive Kurve von Geschlecht g und sei $(n, d) = 1$. Sei T das Tangentialbündel auf $U^s_X(n, d)$. Dann gilt $c_r(T) = 0$ für $r > n(n-1)(g-1)$.*

3. Gieseker-Vektorbündel führen zur "Kompaktifizierung" von Modulräumen von Vektorbündeln auf stabilen Kurven mit folgenden Eigenschaften:

(1) Wohlverhalten in Familien.
(2) Verträglichkeit unter Normalisierung der Kurve.

Anders ausgedrückt: Der Funktor

$$M_{m,g}(\mathrm{BGL}_n, d) : \left\{ \begin{array}{ll} \text{Schemata} & \to \text{Gruppoide} \\ S & \mapsto \{(C \to S, (x_i : S \to C)_i, C' \to C, \mathscr{E})\} \end{array} \right.$$

besitzt Eigenschaften analog zum stack $M_{m,g}(X, \beta)$ (vgl. [**Man99**]) der m-punktierten stabilen Abbildungen von Geschlecht g in eine Varietät X.

Fragen 4.8.

(1) Analogon für beliebige reduktive Gruppe G statt GL_n?
(2) Wie sieht die entsprechende Kompaktifizierung von G aus?
(3) Gromov-Witten-Invarianten für BGL_n?

References

[EK99] R. Earl & F. Kirwan – The Pontryagin rings of moduli spaces of arbitrary rank holomorphic bundles over a Riemann surface, *J. London Math. Soc. (2)* **60** (1999), no. 3, 835–846.

[Gie84] D. Gieseker – A degeneration of the moduli space of stable bundles, *J. Differential Geom.* **19** (1984), no. 1, 173–206.

[Kaua] I. Kausz – A canonical decomposition of generalized theta functions on the moduli stack of Gieseker vector bundles.

[Kaub] ———, A Gieseker type degeneration of moduli stacks of vector bundles on curves.

[Kau00] I. Kausz – A modular compactification of the general linear group, *Doc. Math.* **5** (2000), 553–594 (electronic).

[Man99] Y. I. Manin – *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[New72] P. E. Newstead – Characteristic classes of stable bundles of rank 2 over an algebraic curve, *Trans. Amer. Math. Soc.* **169** (1972), 337–345.

[NS99] D. S. Nagaraj & C. S. Seshadri – Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves. II. Generalized Gieseker moduli spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **109** (1999), no. 2, 165–201.

[Ses00] C. S. Seshadri – Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves, School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999), ICTP Lect. Notes, vol. 1, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000, 205–265.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 51–53
Universität Göttingen, 2003-04

OBERE ABSCHÄTZUNGEN FÜR KUSSZAHLEN UND ANDERE ALGEBRO-GEOMETRISCHE GRÖSSEN MITTELS MODULFORMEN

N.-P. Skoruppa
Universität GH Siegen, Walter-Flex-Str. 3, 37068 Siegen, Germany
E-mail : skoruppa@math.uni-siegen.de

Abstract. We discuss some novel estimates of kissing numbers of lattices.

1. Einführung

Einem Gitter L im n-dimensionalen euklidischen Raum ordnet man die für reelles $t > 0$ erklärte Thetareihe

$$\theta_L(t) = \sum_{x \in L} \exp(-\pi t^{2/n} x^2) = 1 + a_1(L) e^{-\pi t^{2/n} r_1} + a_2(L) e^{-\pi t^{2/n} r_2} + \dots$$

zu. Hier bezeichnet x^2 das Quadrat der euklidischen Länge von x, ferner $0 < r_1 < r_2 < \dots$ die Folge der in L auftretenden Längenquadrate und $a_j(L)$ die Anzahl der $x \in L$ mit $x^2 = r_j$. Insbesondere ist $a_1(L)$ die Anzahl der Minimalvektoren von L. Bekanntlich hat man nach der Poissonschen Summenformel

$$t\, \theta_L(t) = \det(L)\, \theta_{L^*}(1/t).$$

November 12th, 2003.

Die genaue Erklärung der rechten Seite ist hier nicht wichtig. Wir lesen aus der letzten Gleichung jedenfalls ab, dass $t\,\theta_L(t)$ monoton steigend in t ist. Also hat $t\,\theta_L(t)$ eine positive Ableitung:

$$1 + a_1(L)\left(1 - \frac{2}{n}\pi t^{\frac{2}{n}} r_1\right) e^{-\pi t^{2/n} r_1} + a_2(L)\left(1 - \frac{2}{n}\pi t^{\frac{2}{n}} r_2\right) e^{-\pi t^{2/n} r_2} + \cdots \geq 0$$

Setzen wir $u = \pi t^{2/n} r_1$, so können wir für $u \geq \frac{n}{2}$ alle zu r_j mit $j \geq 2$ gehörenden Glieder der vorstehenden Reihe weglassen, und wir erhalten so

$$1 + a_1(L)\left(1 - \frac{2}{n}u\right) e^{-u} \geq 0.$$

Für $u = \frac{n}{2} + 1$ wird dies schliesslich zu

$$a_1(L) \leq \frac{n}{2} e^{\frac{n}{2}+1}.$$

Bezeichnen wir die Gitterkusszahl in Dimension n mit λ_n, so ergeben die soeben für beliebige Gitter hergeleiteten Ungleichungen die für wachsendes n asymptotische Abschätzung

$$\lambda_n \leq e^{\frac{n}{2}(1+o(1))} \leq 1,65^{\frac{n}{2}(1+o(1))}.$$

Nach einem Satz von Kabatianski und Levenshtein gilt für die Kusszahl τ_n in Dimension n die asymptotische Abschätzung

$$\tau_n \leq 1,32043^{\frac{n}{2}(1+o(1))}.$$

Um mit der oben skizzierten elementaren Methode dieser wesentlich besseren Abschätzung nahe zu kommen, liegt es nahe, die durchgeführten Rechnungen und Schlüsse statt mit der Funktion $\exp(-\pi t^{2/n} x^2)$ mit $F(t^{1/n}|x|)$ für allgemeinere Funktionen $F(u)$ $(u > 0)$ zu probieren. Solche Funktionen übersieht man am besten via ihrer Mellin-Transformierten, und dazu ist wiederum naheliegend, zu studieren, wie sich die oben durchgeführten Schlussweisen nach Mellin-Transformation bezüglich $t > 0$ übersetzen. Es zeigt sich, dass das Monotonieargument im Wesentlichen einer etwas mysteriösen Konvexitäts-eigenschaft von $\log s(s-1)\Lambda_L(s)$ im kritischen Streifen entspricht, wo $\Lambda_L(s)$ die Mellin-Transformierte von $\theta_L(t)$ ist. Für Details verweisen wir auf [**Sko02b**].

Im Vortrag diskutierten wir diese Konvexitätseigenschaft und zeigten wie diese, angewandt mit geeigneten Funktionen $F(t)$, ohne grosse Mühe die Abschätzungen

$$\lambda_n \leq 1,3592^{\frac{n}{2}(1+o(1))}$$

ergeben.

Wir deuteten an, wie die hier skizzierten Ideen auch benutzt werden können, um die bekannten unteren Schranken von Zimmert für Regulatoren algebraischer Zahlkörper zu beweisen. In einer gemeinsamen Arbeit mit E. Friedman führten diese Methoden ferner zu einem Beweis eines grossen Teils einer Vermutung von Berger und Martinet über relative Regulatoren. Schliesslich diskutierten wir noch Möglichkeiten der Verallgemeinerung dieses Ideenkreises, um etwa explizite Versionen des Satzes von Kazhdan-Margulis über die Ko-Volumen diskreter Untergruppen in halb-einfachen Lie-Gruppen ohne kompakte Faktoren zu erzielen. Einen Überblick findet man in [**Sko02a**].

References

[Sko02a] N.-P. Skoruppa – Modular forms methods for bounding kissing numbers, regulators and co-volumes of arithmetic groups, Explicit Structures of Modular Forms and Zeta Functions, Ryushi-do, Osaka, 2002, 132–141.

[Sko02b] ______, Quick asymptotic bounds for kissing numbers, 2002, to appear in Mathematica.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 55–56
Universität Göttingen, 2003-04

ZUR PHYSIK VON IDENTITÄTEN À LA ROGERS-RAMANUJAN

N.-P. Skoruppa
Universität GH Siegen, Walter-Flex-Str. 3, 37068 Siegen, Germany
E-mail : skoruppa@math.uni-siegen.de

Abstract. We discuss interesting powerseries identities related to modular units.

1. Einführung

Die Identitäten von Rogers-Ramanujan gehören zu den klassischen Identitäten zwischen erzeugenden Funktionen, wie sie in der elementaren Zahlentheorie und Kombinatorik auftreten. So findet man z.B. in *The Theory of Numbers* von *Hardy und Wright* im Abschnitt 19.13 die Identität

$$\prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv\pm 1 \bmod 5}} (1-x^n) = \sum_{m\geq 0} \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

und eine weitere ähnlicher Bauart. Identitäten dieser Art sind selten. Die dabei auftretenden Funktionen sind *modulare Einheiten*, die aber noch weitere sehr bemerkenswerte Eigenschaften haben. Sie treten stets als Teil gewisser Scharen modularer Einheiten mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten auf, die sich

November 13th, 2003.

dadurch auszeichnen, dass der von einer solchen Schar aufgespannte Raum von Funktionen invariant unter SL(2,**Z**) ist.

Im Vortrag stellten wir einige Struktursätze über die hier auftretenden modularen Einheiten vor, und wir zeigten, wie man zumindest algorithmisch die erwähnten Scharen aufzählen kann. Und wir haben erläutert, auf welche Weise diese Scharen tatsächlich auch in der theoretischen Physik auftreten. Für Details verweisen wir auf die Arbeiten [**ES96**], [**ES98**] und [**ES03**].

References

[ES96] W. Eholzer & N.-P. Skoruppa – Product expansions of conformal characters, *Phys. Lett. B* **388** (1996), no. 1, 82–89.

[ES98] ______, Examples of modular sets, 1998.

[ES03] ______, SL(2,Z)-invariant spaces spanned by modular units, 2003.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 57–68
Universität Göttingen, 2003-04

TWO CONSTRUCTIONS OF THE MODULI SPACE OF VECTOR BUNDLES ON AN ALGEBRAIC CURVE

G. Hein
FU Berlin, Inst. Math. II, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany
E-mail : ghein@math.fu-berlin.de

Abstract. We present two constructions of the coarse moduli space of semistable vector bundles on an algebraic curve X. To do so, we survey semistability, Geometric Invariant Theory, illustrate this theory for the moduli space of elliptic curves, and show the importance of the global sections of the generalized Θ-line bundle associated to semistable vector bundles.

1. Introduction

On November 17, 2003 the author gave a talk in Professor Y. Tschinkel's seminar *Geometrische Methoden in der Darstellungstheorie* at the University of Göttingen. These are the slightly extended notes of this lecture. Since the talk was restricted to sixty minutes, Section 4 of the present presentation was skipped in the lecture.

The plan of this article is to present two constructions to obtain the moduli space of semistable vector bundles on a algebraic curve, and to explain why we have to insert the adjective semistability here. First, we give the setup for these constructions in Section 2. Both constructions are based on

November 17th, 2003.

Grothendiecks Quot schemes which are presented in this section. In the third section, we sketch Mumford's Geometric Invariant Theory (GIT). Then, we illustrate this approach for the moduli space of elliptic curves in Section 4. This section is included because, in this case, we can very precisely describe the invariant forms and the invariant subring. In Section 5, we apply the GIT to our moduli problem whereas in Section 6, we present an alternative approach to the construction of this moduli space. However, we also point out that this construction can be understood in the language of the GIT, provided we understand the invariant sections.

There is little that is original in what I present here. Perhaps the presentation of topics in the last section is novel. However, the author is responsible for all mistakes.

The author wishes to express his gratitude for being invited to the lecture. He appreciated the atmosphere during his short stay in Göttingen.

2. The setup

Let X be a smooth projective curve of genus $g \geqslant 2$ over an algebraically closed field k. Furthermore, we fix a globally generated ample divisor $\mathscr{O}_X(1)$. We want to study vector bundles on X. As usual for a sheaf F, we write $F(m)$ for the twist $F \otimes \mathscr{O}_X(1)^{\otimes m}$. There are two discrete invariants, i.e. invariants which do not vary in flat familes over connected schemes, namely the rank r and the degree d of the vector bundle. If the rank is one, then we obtain the Picard variety $\mathrm{Pic}^d(X)$ of all isomorphism classes of line bundles with fixed degree d, they form a $\mathrm{Pic}^0(X)$-torsor. The smooth variety $\mathrm{Pic}^d(X)$ is a paradigm for a moduli space. In the following we investigate the case when $r \geqslant 2$. Furthermore, we assume that the genus g of X is at least two.

We want to equip the following set with the structure of a projective variety

$$\mathscr{M}_X(r,d) = \left\{ \begin{array}{c} \text{isomorphism classes of vector bundles } E \text{ on } X \text{ with} \\ \mathrm{rk}(E) = r \ \deg(E) = d \end{array} \right\} .$$

When considering a vector bundle E as a point in this space (so far it is only a set), we write $[E]$ for the corresponding point in $\mathscr{M}_X(r,d)$. It turns out that we have to modify the definition of $\mathscr{M}_X(r,d)$ to achieve this goal. For a fixed integer a we set

$$\mathscr{M}_X^a(r,d) = \{[E] \in \mathscr{M}_X(r,d) \,|\, H^1(E(a-1)) = 0\} .$$

Since $\mathscr{M}_X(r,d) = \cup_{a\in\mathbb{Z}}\mathscr{M}_X^a(r,d)$, we content ourselves with the construction of $\mathscr{M}_X^a(r,d)$. The theory of the Castelnuovo-Mumford regularity (see [**Mum66**]) implies that for $[E] \in \mathscr{M}_X^a(r,d)$, the twisted vector bundle $E(a)$ is globally generated and has $h^0(E(a)) = \chi(E(a))$. Thus, the number $M := h^0(E(a))$ does not depend on the choice of $[E] \in \mathscr{M}_X^a(r,d)$. Fixing an isomorphism $H^0(E) \cong k^{\oplus M}$, we obtain a surjection $F \twoheadrightarrow E$ for $F = \mathscr{O}_X(-a)^{\oplus M}$.

We have seen that Grothendieck's Quot scheme $\mathrm{Quot} := \mathrm{Quot}_{X/F}^{r,d}$ of quotients of F with rank r and of degree d parametrizes all vector bundles of $\mathscr{M}_X^a(r,d)$. Of course this scheme is much bigger than the space we want, and it parametrizes sheaves which have nontrivial torsion. However, for the subset

$$\mathrm{Quot}(E) := \{[F \to G] \in \mathrm{Quot} \mid \text{there exists an isomorphism } G \xrightarrow{\alpha} E\}$$

the following holds:

- $\mathrm{Quot}(E)$ is irreducible, and
- the quotients $[\pi : F \to G]$ in $\mathrm{Quot}(E)$ which induce an isomorphism $H^0(\pi) : H^0(F(a)) \to H^0(G(a))$ form a nonempty open subset in $\mathrm{Quot}(E)$.

There exists a natural $\mathrm{SL}(M)$ action on Quot and, set theoretically, our space $\mathscr{M}_X^a(r,d)$ can be identified with some subset of the quotient of this group action. Thus, we end up with the task of defining a scheme structure on the quotient space of a group action. There exists a general theory for doing so which we briefly sketch in the next section.

3. Geometric invariant theory

3.1. Group actions on schemes and quotients. The general problem of the Geometric invariant theory is: Given a group G and a scheme X together with a group action $G \times X \to X$ does there exist a "space of the orbits" Y in the category of schemes. Further questions are:

- How far is X from being a G-bundle over Y?
- Which geometric properties of Y can we deduce from X (and G)?
- How can we describe sheaves on Y by sheaves on X?

3.2. Group actions on affine schemes. If $X = \mathrm{Spec}(A)$ is affine, then suppose that there exists a G-invariant map $f : X \to \mathrm{Spec}(B)$. The corresponding ring morphism $\varphi : B \to A$ must have its image in the subring A^G of the G-invariant elements of A. This motivates the following: We set $X//G := \mathrm{Spec}(A^G)$. The inclusion $A^G \to A$ induces a dominant morphism $X \to X//G$. The above consideration shows that every G-invariant morphism $X \to \mathrm{Spec}(C)$ factors through $X//G$. Thus, $X//G$ is a categorial quotient.

3.3. A bad group action. Suppose that we consider the group action $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ given by multiplication, i.e. $(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$. The set of orbits is $\mathbb{P}^1$ and the point $(0, 0)$ which lies in the closure of every orbit. Consequently, there are no $\mathbb{C}^*$ invariant functions on $\mathbb{C}[x, y]$ which can separate different orbits. Indeed, a simple calculation shows that $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}$. Thus, $\mathbb{C}^2//\mathbb{C}^*$ is just $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. This example shows how far $X//G$ can be from an orbit space. It also explains why we use the notation $X//G$ instead of X/G.

3.4. Linearization of group actions on quasiprojective schemes. For X quasiprojective with an ample line bundle $\mathscr{O}_X(1)$, we need a linearization of the action. First we require that for all $g \in G$ there exists an isomorphism $g^*\mathscr{O}_X(1) \cong \mathscr{O}_X(1)$. In the case that X is projective and G is affine, this requirement is not too hard, because the map from $G \to \mathrm{Pic}(X)$ defined by $g \mapsto g^*\mathscr{O}_X(1) \otimes \mathscr{O}_X(-1)$ is locally constant. Thus, by replacing $\mathscr{O}_X(1)$ with the product $g_1^*\mathscr{O}_X(1) \otimes \ldots \otimes g_k^*\mathscr{O}_X(1)$, where each g_i comes from a different connected component of G, we obtain such a G invariant polarization. Suppose that $\mathscr{O}_X(1)$ is G invariant. We consider the two morphisms act (group action) and pr_X (projection)

$$G \times X \overset{\mathrm{act}}{\underset{\mathrm{pr}_X}{\rightrightarrows}} X$$

from $G \times X$ to X. An isomorphism $\beta : \mathrm{act}^*\mathscr{O}_X(1) \to \mathrm{pr}_X^*\mathscr{O}_X(1)$ is called a linearization of the group action if it fullfils a cocycle condition. The existence of the isomorphism β implies that $\mathrm{pr}_G(\mathrm{act}^*\mathscr{O}_X(1) \otimes \mathrm{pr}_X^*\mathscr{O}_X(-1))$ is the trivial line bundle on G. We may interpret β as a family of isomorphisms $\beta_g : g^*\mathscr{O}_X(1) \cong \mathscr{O}_X(1)$ for all $g \in G$. The cocycle condition is equivalent to $\beta_{g \circ h} = h^*(\beta_g) \circ \beta_h$ for all $g, h \in G$. From now on, we suppose that a linearization of the group action exists. Indeed, in most examples we consider the linearization used to define the group action.

3.5. The GIT quotient of a quasiprojective scheme. Let $R = \oplus_{k \geqslant 0} R_k$ with $R_k = H^0(\mathscr{O}_X(k))$ the graded ring of the pair $(X, \mathscr{O}_X(1))$. The linearization defines an action of G on R_k. Thus, we obtain the subring $R^G \subset R$ which defines a rational map

$$X = \mathrm{Proj}(R) \dashrightarrow \mathrm{Proj}(R^G) =: X//G \ .$$

If the group G is reductive, then the ring R^G is noetherian. We see that by definition $X//G$ is projective. However, we have only a rational morphism from X to $X//G$, because the G invariant homogeneous functions may have base points. These base points are called unstable points of X with respect to G and the chosen polarization. In contrast, we define semistable and stable points as follows:

semistable : $x \in X$ is semistable iff there exists a G invariant homogeneous k-form which does not vanish on x. The open set of all semistable points is denoted by X^{ss}.

stable : $x \in X$ is called stable iff x is semistable and its orbit is closed in X^{ss} and its stabilizer is finite. The open set of all stable points is denoted by X^s.

Thus, we obtain a morphism $X^{ss} \to X//G$. This morphism becomes a fibration of orbits when restricted to X^s.

4. An example: The GIT moduli space of elliptic curves

4.1. Parametrizing elliptic curves. Let (E, P) be an elliptic curve with a geometric point $P \in E$ which is the zero point for the group scheme E. The linear system $|2P|$ is globally generated and of dimension one. Thus, we get a morphism $\psi : E \to \mathbb{P}^1$. By the Hurwitz formula, the set C of critical values of ψ has exactly four elements $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. On the other hand, we can reconstruct E from the set C as follows: Consider C as a subscheme of $\mathbb{P}^1$. This way we obtain an embedding α_C from the short exact sequence

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-4) \stackrel{\alpha_C}{\to} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_C \to 0\,.$$

Now we fix an isomorphism $\beta : \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to \mathscr{O}(-4)$ and define an $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$-algebra structure on $A_C = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ locally by

$$(f, g) \cdot (f', g') = (ff' + \alpha_C(\beta(g \otimes g')), fg' + f'g).$$

We now observe that $E \cong \operatorname{Spec}(A_C)$. Two elliptic curves E and E' are isomorphic, iff the corresponding divisors C and C' are mapped to each other by an automorphism of $\mathbb{P}^1$.

4.2. The GIT setting. If V is a vector space of dimension two, then we let $\mathbb{P}^1$ be the space $\mathbb{P}(V^\vee)$. This might seem a little confusing. However, it will simplify matters. Since a divisor C on $\mathbb{P}^1$ of degree four is given by a homogeneous 4-form, up to multiplication, we see that these divisors are parametrized by $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4(V))$. The group $\mathrm{SL}(V)$ acts on $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4(V))$. The quotient $X//G$ is the GIT moduli space of elliptic curves.

Let us apply the geometric invariant theory to the group action

$$\mathrm{SL}(V) \times \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4(V)) \to \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4(V))\,.$$

The graded ring R of the pair $(\mathbb{P}^4, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^4}(1))$ is given by

$$R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n \quad \text{with} \quad R_n = \mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^4(V))\,.$$

4.3. The graded ring $R^{\mathrm{SL}(V)}$. The representations of $\mathrm{SL}(V)$ are well understood, see §11 in [**FH91**] for an elementary introduction which includes all we need to know for our purposes. The finite dimensional representation $\mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^4(V))$ decomposes into a direct sum of irreducible representations:

$$\mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^4(V)) = \bigoplus_{k=0}^{2n} \mathrm{Sym}^{2k}(V)^{\oplus a_{n,k}}\,.$$

The $\mathrm{SL}(V)$ invariant vectors in R_n form the direct summand $\mathrm{Sym}^0(V)^{\oplus a_{n,0}}$. Computing weights we obtain the following formula for $a_{n,0}$:

$$a_{n,0} = \#\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \text{ with } l \geqslant 0\,, k \geqslant 0\,, \text{ and } 3l + 2k = n\,\}\,.$$

Indeed, the representation $\mathrm{Sym}^{2k}(V)$ has weights

$$\{-2k, -2(k-1), -2(k-2), \ldots, 2(k-1), 2k\},$$

all with multiplicity one. Hence, the subspace $W_{2k} \subset \mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^4(V))$ of weight $2k$ vectors has dimension $\sum_{l=k}^{2n} a_{n,l}$. On the other hand, using the fact that the weights of $\mathrm{Sym}^4(V)$ are $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$, we obtain that the space W_{2k} is of dimension w_{2k} with

$$w_{2k} = \# \left\{ (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^5 \text{ with } \begin{array}{c} a_k \geqslant 0 \text{ for } k = -2, \ldots, 2 \\ a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 = n \\ -2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2 = k \end{array} \right\}.$$

This reduces the computation of $a_{n,0} = w_0 - w_2$ to a purely combinatorial problem.

The following table shows the dimensions $a_{n,0}$ for the first integers n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$a_{n,0}$	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4

4.4. Using the relation $a_{n+6,0} = 1 + a_{n,0}$, we can easily compute the Poincaré series of the graded ring $R^{\mathrm{SL}(V)}$.

$$H(R^{\mathrm{SL}(V)}, t) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,0} t^n = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$$

This is the Poincaré series of a ring with two generators, one in weight two, and one in weight three. Next we will see that this predicted structure is indeed the structure of $R^{\mathrm{SL}(V)}$.

4.5. An algebra basis of $R^{\mathrm{SL}(V)}$. Let $\{e_0, e_1\}$ be a basis of V. Then we take the associated basis $\{X_0, \ldots X_4\}$ of $\mathrm{Sym}^4(V)$ with $X_i = e_0^i e_1^{4-i}$. It is easy to check that the two homogeneous polynomials

$$\begin{aligned} g_2 &= 12X_0X_4 - 3X_1X_3 + X_2^2 \\ g_3 &= 72X_0X_2X_4 - 27X_0X_3^2 - 27X_1^2X_4 + 9X_1X_2X_3 - 2X_2^3 \end{aligned}$$

are $\mathrm{SL}(V)$ invariant. Moreover, there exits no algebraic relation between these two polynomials. Thus, we obtain an inclusion of $\psi : \mathbb{C}[g_2, g_3] \to R^{\mathrm{SL}(V)}$. Since the polynomial $g_2^m g_3^n$ is homogenous of degree $2m + 3n$, we obtain that

$$\dim(\mathrm{im}(\psi) \cap R_k) = \#\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \geqslant 0\,,\ n \geqslant 0\,,\ 2m + 3n = k\}\,.$$

We conclude that ψ is an isomorphism.

4.6. Stability of orbits. Now we want to investigate whether an orbit is (semi)stable or not. If $C = \sum_i a_i P_i$ is an effective divisor of degree d on $\mathbb{P}^1$, then we call the decreasing sequence of multiplicities $(a_1, \ldots, a_k)$ the type of C. This gives a stratification on the space of all effective divisors. The number of strata is the number of partitions of the integer d. If $d = 4$, then we have only five strata. In the next table, we list these five types. For each type we give the dimension of the stratum, an example divisor, the corresponding point in $\mathbb{P}^4$ (which is nothing but the coefficients of a polynomial vanishing at those four points) and the values of g_2 and g_3 for this point (here we replaced $X = (X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4)$ by X).

type	dimension of stratum	example	X	$g_2(X)$	$g_3(X)$
(1,1,1,1)	4	$(0; 1; \lambda; \infty)$	$(0 : 1 : -1 - \lambda : \lambda : 0)$	$\lambda^2 - \lambda + 1$	$2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2$
(2,1,1)	3	$(0; 0; 1; \infty)$	$(0 : 1 : -1 : 1 : 0)$	1	2
(2,2)	2	$(0; 0; \infty; \infty)$	$(0 : 0 : 1 : 0 : 0)$	1	-2
(3,1)	2	$(0, 0, 0, \infty)$	$(0 : 1 : 0 : 0 : 0)$	0	0
(4)	1	$(0, 0, 0, 0)$	$(1 : 0 : 0 : 0 : 0)$	0	0

4.7. Meet the j-invariant. The ratio $(g_2^3 : g_3^2)$ is consequently an invariant of a divisor of degree four modulo the $\mathrm{SL}(V)$ action. Those divisors where g_2 and g_3 vanish form the unstable locus. The function $j := \frac{2^8 3^2 g_2^3}{4g_2^3 - g_3^2}$ is called the j-invariant of the elliptic curve corresponding to that divisor. The denominator is different from zero iff the curve is smooth.

We can now conclude the study of the orbits:

type	stability	reasons	geometric meaning
(1,1,1,1)	stable	the j-invariant separates the orbit from the other orbits	smooth elliptic curve
(2,1,1)	semistable, but not stable	$(g_2^3 : g_3^2)$ is defined, but cannot separate this orbit from the type (2,2) orbit	irreducible nodal rational curve
(2,2)	semistable, but not stable	$(g_2^3 : g_3^2)$ is defined, but the stabilizer is of dimension one	two rational curves identified in two different points
(3,1)	unstable	$(g_2^3 : g_3^2)$ is not defined	irreducible rational curve with a cusp
(4)	unstable	$(g_2^3 : g_3^2)$ is not defined	two rational curves identified in a point with tangent direction

4.8. Conclusion. Thus, the GIT-moduli space of elliptic curves is (when constructed in this way) the weighted projective space $\mathbb{P}[2,3]$. Ignoring this structure by passing to the subring generated by g_2^3 and g_3^2, some people just identify it with $\mathbb{P}^1$ and say "The moduli space of elliptic curves is the affine line, and it is compactified by the point at infinity which corresponds to the nodal cubic curve."

5. The GIT construction of the moduli space of vector bundles

5.1. Stable and semistable points in the Quot scheme. Now we return to the situation in Section 2. We have to decide whether a quotient $[F \xrightarrow{\pi} E] \in$ Quot is stable (resp. semistable) for the $\mathrm{SL}(M)$ action. For a coherent sheaf G, we call the quotient $\frac{\deg(G)}{\mathrm{rk}(G)}$ the slope of G and denote it by $\mu(G)$. Using the Hilbert-Mumford criterion, we find (see [**Mum65**] or [**New78**]) that $[F \xrightarrow{\pi} E]$ is semistable if the following two properties hold:

(i) The induced linear map $H^0(\pi) : H^0(F(a)) \to H^0(E(a))$ is an isomorphism.

(ii) For all quotients $E \to G$ the inequality $\mu(E) \leqslant \mu(G)$ holds.

The second property is independent of α. Hence, it is a property of E itself, which is called semistability. If for all quotients $E \to G$ the inequality $\mu(E) < \mu(G)$ holds, then E is called stable. Having the properties of $\mathrm{Quot}(E)$ in mind (see the end of Section 2), we obtain that $\mathscr{M}_X^a(r,d) = \mathrm{Quot}(E)//\mathrm{SL}(M)$ is the moduli space of semistable bundles on the algebraic curve X. Next we see that there is no need to fix the number a.

5.2. Semistability and boundedness. Next we show that a semistable sheaf E is contained in $\mathscr{M}_X^a(r,d)$ for all $a > 2g - 1 - \mu(E)$. Indeed, suppose that this inequality holds and $[E] \notin \mathscr{M}_X^a$. Hence, $h^1(E(a-1)) > 0$ and, by Serre duality, there exists a nontrivial morphism $\alpha : E \to \omega_X(1-a)$. If E is semistable, then we conclude that $\mu(E) \leqslant \mu(\omega_X(1-a)) = 2g-1-a$. Thus, a contradiction.

Hence, the parameter a of Section 2 can be ignored after all. We just set $a := 2g - \frac{d}{r}$ and we are done. However, all those sheaves in $\mathscr{M}_X^{a+k}(r,d) \setminus \mathscr{M}_X^{a}(r,d)$ cannot be parametrized by the GIT moduli space, because they are not semistable.

On the one hand, semistability gives rise to a noetherian moduli scheme. On the other hand, we do not obtain the moduli space of all vector bundles, because we are to restricted to the semistable ones.

5.3. Properties of the moduli space $\mathscr{M}_X(r,d)$.

1. $\mathscr{M}_X(r,d)$ is a normal reduced projective variety of dimension $r^2(g-1)+1$.
2. The singular locus of $\mathscr{M}_X(r,d)$ is the set of all semistable bundles which are not stable. In particular, $\mathscr{M}_X(r,d)$ is smooth, iff r and d are coprime. (There exists a single exception to this rule: When $g=2$, $r=2$, and d is even then $\mathscr{M}_X(r,d)$ is smooth.)
3. The map induced by the assignment $E \mapsto \det(E)$ gives rise to a morphism $\det : \mathscr{M}_X(r,d) \to \mathrm{Pic}^d(X)$. The fiber $\det^{-1}(L)$ is denoted by $\mathscr{M}_X(r,L)$.
4. For L_1 and L_2 in $\mathrm{Pic}^d(X)$ there exists (not canonically) an isomorphism $\mathscr{M}_X(r,L_1) \cong \mathscr{M}_X(r,L_2)$. Thus, $\mathscr{M}_X(r,d)$ is a $\mathscr{M}_X(r,L)$ fiber bundle over $\mathrm{Pic}^d(X)$. Therefore, to understand $\mathscr{M}_X(r,d)$ it is almost sufficient to study $\mathscr{M}_X(r,L)$.
5. The Picard group $\mathrm{Pic}(\mathscr{M}_X(r,L))$ is infinite cyclic. The ample generator is called the generalized Θ line bundle.

5.4. The S-equivalence of semistable bundles. It remains to discuss the semistable vector bundles which are not stable. These vector bundles are called properly semistable bundles. The GIT states that two properly semistable points are identified if the closure of their orbits intersect in the semistable locus. If E is an extension of two semistable sheaves E' and E'' of the same slope, then the closure of the orbit also contains the trivial extension $E' \oplus E''$. The smallest equivalence relation which relates E to this direct sum is called the S-equivalence. Note that any semistable vector bundle is S-equivalent to a direct sum of stable vector bundles of the same slope. The moduli space $\mathscr{M}_X(r,d)$ parametrizes S-equivalence classes of semistable vector bundles.

6. Construction of the moduli space without GIT

6.1. We propose an alternative construction of the moduli space which does not use the GIT. However, we are in some sense reversing the chronological order by doing so. This construction can be found in Faltings' article [**Fal93**]. See also the author's article [**Hei99**] for a slightly different presentation and an extension of this construction to the moduli spaces of vector bundles on algebraic surfaces. This construction applies to every moduli space which is constructed using GIT as we point out next:

Let $G \times Y \to Y$ be a group action on the scheme Y and $Y \overset{\pi}{\dashrightarrow} Z := Y//G$ the GIT quotient. We suppose that G has connected orbits. Let L be a base point free and ample line bundle on Z. We assume that $\pi^* L$ extends to a line bundle M on Y. Suppose that the sections $\{s_i\}_{i=0,\dots,N}$ generated L and their pull backs $\{t_i\}_{i=0,\dots,N}$ generate M on the semistable locus. Then we obtain a rational morphism $Y \overset{(t_0:\dots:t_N)}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^N$. Since we did not assume that L is very ample, Z is not the image of this morphism but its Stein factorization.

Thus, once we understand the GIT quotient Z and an ample line bundle with its global sections, we can give a further construction of the moduli space. The one presented here for the moduli space of vector bundles on an algebraic curve is based on the global sections of the generalized Θ-line bundle which correspond to vector bundles. These sections span a linear system in the space of the G-invariant sections.

6.2. Six equivalent formulations for semistability. A coherent sheaf E on an irreducible curve X is semistable if one of the following equivalent conditions is satisfied:

(i) E is torsion free, and for all $F \subset E$, we have $\mu(F) \leqslant \mu(E)$.
(ii) For all quotients $E \to G$ of positive rank, we have $\mu(E) \leqslant \mu(G)$.
(iii) For all $F \subset E$, we have $\chi(F) \cdot \mathrm{rk}(E) \leqslant \chi(E) \cdot \mathrm{rk}(F)$.
(iv) For all quotients $E \to G$ one has $\chi(E) \cdot \mathrm{rk}(G) \leqslant \chi(G) \cdot \mathrm{rk}(E)$.
(v) There exists a nontrivial coherent sheaf F on X with $H^*(X, F \otimes E) = 0$.
(vi) There exists a nontrivial coherent sheaf F of rank $r^3(g_X - 1)$ of X such that all cohomology groups of $F \otimes E$ vanish.[1]

6.3. Sections of the generalized Θ line bundle associated to vector bundles. We consider here the universal family on the Quot scheme Quot of

[1] The rank condition is for curves of genus at least two. It can be replaced by rank one in the case of a rational curve, and by r in case of a curve of genus one.

Section 2. This means we consider the morphisms

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Quot} \times X & \xrightarrow{p} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \\ \mathrm{Quot} & & \end{array}$$

and the short exact sequence $0 \to \ker(\pi) \to p^*F \xrightarrow{\pi} \mathscr{G} \to 0$ induced by the surjection π. Let G be a rank $r^3(g-1)$ vector bundle on X with $\mu(G) = (g-1) - \frac{d}{r}$ which satisfies $h^0(G(-a)) = 0$. We obtain a long exact sequence on Quot:

$$0 \to q_*(\ker(\pi) \otimes p^*G) \to q_*(p^*F \otimes p^*G) \to q_*(\mathscr{G} \otimes p^*G) \to$$

$$\to R^1q_*(\ker(\pi) \otimes p^*G) \xrightarrow{\gamma} R^1q_*(p^*F \otimes p^*G) \to R^1q_*(\mathscr{G} \otimes p^*G) \to 0\,.$$

The condition $h^0(G(-a)) = 0$ implies that $q_*(p^*F \otimes p^*G) = 0$. Thus, we can compute the ranks of the two vector bundles $A_1 := R^1q_*(\ker(\pi) \otimes p^*G)$ and $A_0 := R^1q_*(p^*F \otimes p^*G)$ by the Riemann-Roch theorem to obtain that γ is a morphism of two vector bundles of the same rank R. Thus, we obtain a section $\theta_G := \det(\gamma)$ in the line bundle $\mathscr{O}_{\mathrm{Quot}}(\Theta_G) := \Lambda^R A_0 \otimes (\Lambda^R A_1)^{-1}$. It is not to difficult to see that the line bundles Θ_G and $\Theta_{G'}$ are isomorphic for $\det(G) \cong \det(G')$. Fixing a determinant, i.e. considering only bundles G_i which coincide with G in the Grothendieck group $K_0(X)$, and fixing isomorphisms $\mathscr{O}(\Theta_{G_i}) \cong \mathscr{O}(\Theta_G)$, we obtain for each of the vector bundles G_i a section in $\mathscr{O}(\Theta_G)$. From part (vi) of 6.6.2 it follows that the base locus of these sections is exactly the unstable locus, i.e. the set of all sheaves parametrized by Quot which are not semistable.

6.4. Semipositivity and S-equivalence. Having the above sections and the information about the moduli space, we can obtain $\mathscr{M}_X(r,d)$ by the construction pointed out in 6.6.1. However, the ampleness of the Θ-line bundle can be read off from the following result of Faltings.

Theorem. (I.4 in [Fal93]) *Let $\mathscr{E}$ be family of vector bundles on $X \times C$ where C is a smooth projective curve. Suppose that for the generic point η of C the X bundle $\mathscr{E}_\eta$ is semistable. Then the following holds:*
(i) The Θ divisor Θ_C on the curve C is effective.
(ii) If $\Theta_C = 0$, then all X-vector bundles parametrized by C are S-equivalent.

For an easy proof in the rank two case see 3.4 in the author's article [**Hei99**]. This theorem guarantees that the morphism constructed using the sections of $\mathscr{O}(\Theta_G)$ can distinguish different S-equivalence classes. (Possibly after Stein factorization.) Here we again use the fact, pointed out in Section 2, that the subscheme Quot(E) of the Quot scheme Quot is connected.

References

[Fal93] G. Faltings – Stable G-bundles and projective connections, *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), no. 3, 507–568.

[FH91] W. Fulton & J. Harris – *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[Hei99] G. Hein – Duality construction of moduli spaces, *Geom. Dedicata* **75** (1999), no. 1, 101–113.

[Mum65] D. Mumford – *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Mum66] ______, *Lectures on curves on an algebraic surface*, With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

[New78] P. E. Newstead – *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 51, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 69–72
Universität Göttingen, 2003-04

LOCAL SYSTEMS ARISING FROM GALOIS COVERS OF $\mathbb{P}^1$

S. Wewers
Mathematisches Institut der Universität Bonn, Beringstr. 1, 53115 Bonn, Germany • *E-mail :* wewers@math.uni-bonn.de

Abstract. To a family of Galois covers of the projective line, together with a linear representation of its Galois group, we associate a so-called variation of local systems. Its first parabolic cohomology is a local system on the base of the family. We study the monodromy of the resulting local system, and give applications to the regular inverse Galois problem.

1. The regular inverse Galois problem

Let G be a finite group. The *regular inverse Galois problem* for G asks the following question: does there exist a regular Galois extension K of the field $\mathbb{Q}(t)$ whose Galois group is isomorphic to G? (An extension $K/\mathbb{Q}(t)$ is called *regular* if $\mathbb{Q}$ is algebraically closed inside K.) If such an extension exists, then we say that G has a *regular realization over* $\mathbb{Q}(t)$). By Hilbert's Irreducibility Theorem, a positive answer to this question (for a given group G) gives a positive answer for the regular inverse Galois problem (for G). See [**MM99**] and [**Völ96**].

November 19th, 2003.

So far, only a few classes of finite groups are known to have a regular realization over $\mathbb{Q}(t)$. For instance, it is relatively easy to realize all abelian groups and dihedral groups. Most of the research on the RIGP has been concerned with the finite simple groups, because there is a complete classification of them. Hilbert has shown that all symmetric and alternating groups have regular realizations. Following ideas of Belyi, Fried and Thompson, all sporadic simple groups, except for M_{23}, have been realized. The remaining simple groups are all groups of Lie type, i.e. linear or projective groups over finite fields. For these groups, there has been a dramatic progress in recent years. For instance, it is now known that the special simplectic groups $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ have regular realizations if $q < n$, see [**TV99**] and [**DR00**]. Similar statements hold for other series of simple groups of Lie type. In my talk, I explained certain methods which lead to the following theorem (joint work with Michael Dettweiler [**DW03**]).

Theorem 1. *The simple groups* $\mathrm{PSL}_2(p^2)$ *have a regular realization over* $\mathbb{Q}(t)$ *if* $p \not\equiv 1, 4, 16 \pmod{21}$.

The only other cases where the group $\mathrm{PSL}_2(p^2)$ is known to admit a regular realization over $\mathbb{Q}(t)$ are for $p \not\equiv \pm 1 \mod 5$, by a result of Feit [**Fei85**], and for $p \not\equiv \pm 1 \mod 24$, by a result of Shiina [**Shi03**].

2. Variation of local systems

Let $k \subset \mathbb{C}$ be a subfield of the complex numbers. Let $L/k(t)$ be a regular Galois extension, with Galois group G. It corresponds to a finite Galois cover $f_0 : X_0 \to \mathbb{P}^1_k$, where X_0 is a smooth, projective and absolutely irreducible algebraic curve over k. Let $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{P}^1_k$ denote the branch points of f_0, and set $U_0 := \mathbb{P}^1_k - \{t_1, \ldots, t_r\}$. Suppose, moreover, that the group G is a subgroup of $\mathrm{GL}_n(K)$, where K is a number field. Then the Galois cover $f_0 : X_0 \to \mathbb{P}^1_k$ gives rise to a *local system* $\mathscr{V}_0$ of K-vectorspaces on U, as follows. The Galois cover f_0 induces a surjective group homomorphism $\rho_0 : \pi_1(U_0) \to G$. Regarding G as a subgroup of $\mathrm{GL}_n(K)$, and hence ρ_0 as a linear representation of $\pi_1(U)$, we can build a local system $\mathscr{V}_0$ on U_0 whose monodromy representation is equal to ρ_0.

The Galois cover f_0 corresponds to a k-rational point $[f_0]$ on a certain $\mathbb{Q}$-variety $\mathscr{H} = \mathscr{H}_r(G)$, called the *Hurwitz space* for G-Galois covers of $\mathbb{P}^1$ with r branch points. The variety $\mathscr{H}$ is normal and of dimension $r - 3$. Under some additional hypothesis (or after replacing $\mathscr{H}$ by a finite cover $\mathscr{H}' \to \mathscr{H}$) there exists a family $f : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathscr{H}$ of G-Galois covers over $\mathscr{H}$ of which the cover f_0 is the specialization at the point $[f_0]$. If this is the case, then the family f gives rise to a local system $\mathscr{V}$ on $U \subset \mathbb{P}^1 \times \mathscr{H}$ (the complement of the branch locus of f). By construction, the local system $\mathscr{V}_0$ is the restriction of $\mathscr{V}$ to the fibre over $[f_0]$ of the projection $U \to \mathscr{H}$. We call $\mathscr{V}$ a *variation* of the local system $\mathscr{V}_0$ over the base $\mathscr{H}$.

Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of K, and let $K_\mathfrak{p}$ denote the completion of K at $\mathfrak{p}$. Excluding finitely many $\mathfrak{p}$'s, we may assume that G is contained in $\mathrm{GL}_n(\mathscr{O}_\mathfrak{p})$, where $\mathscr{O}_p$ is the ring of integers of $K_\mathfrak{p}$. Let $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathscr{H}$ and $\pi : \mathbb{P}^1_\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ denote the natural maps. We regard $\mathscr{V} \otimes \mathscr{O}_\mathfrak{p}$ as a locally constant étale sheaf of $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$-modules on the étale topology of U and define

$$\mathscr{W} \;=\; R^1\pi_*(j_*\mathscr{V} \otimes \mathscr{O}_\mathfrak{p}).$$

Then $\mathscr{W}$ is a locally constant sheaf of $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$-modules on $\mathscr{H}$ whose stalk at the point $[f_0]$ is the *first parabolic cohomology group* of the local system $\mathscr{V}_0$, with coefficients in $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$. We call $\mathscr{W}$ the *first parabolic cohomology* of the variation $\mathscr{V}$.

Suppose that the Hurwitz space $\mathscr{H}$ is a rational variety over $\mathbb{Q}$, i.e. the function field of $\mathscr{H}$ is isomorphic to $\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_{r-3})$. The local system $\mathscr{W}$ gives rise to a Galois representation

$$\eta_\mathfrak{p} : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_{r-3})) \;\longrightarrow\; \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_p).$$

Let $\bar\eta_\mathfrak{p}$ denote the residual representation of $\eta_\mathfrak{p}$, with target the general linear group over the finite field $k_\mathfrak{p} = \mathscr{O}_p/\mathfrak{p}$. For applications to the regular inverse Galois problem, the task is now to determine the image of $\bar\eta_p$ and to find out whether $\bar\eta_p$ is regular or not (a represention of $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(t_i))$ is *regular* if its image is equal to the image of the restriction to $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}(t_i))$). Very often the representation $\bar\eta_\mathfrak{p}$ is not (or cannot be shown to be) regular, but its associated projective representation is regular.

Example 2. Let $G := \mathrm{PSL}_2(7) \times \mathbb{Z}/3$ and $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-7})$. There is a faithful representation $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_3(K)$. Moreover, the Hurwitz space $\mathscr{H} = \mathscr{H}_4(G)$ has a connected component which is a rational curve, i.e. has function field $\mathbb{Q}(t)$. It corresponds to G-Galois covers of $\mathbb{P}^1$ with ramification of type $(2, 2, 3, 3)$. Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of K with residue characteristic $p > 7$. The image of the restriction of $\bar\eta_\mathfrak{p}$ to $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}(t))$ is a subgroup of $\mathrm{GL}_2(k_\mathfrak{p})$ which contains $\mathrm{SL}_2(k_\mathfrak{p})$ as a subgroup of index 3. If p does not split completely in the extension $K/\mathbb{Q}$, then the projective representation associated to $\bar\eta_\mathfrak{p}$ is regular, and its image is equal to $\mathrm{PSL}_2(p^2)$. This gives Theorem 1.

References

[DR00] M. Dettweiler & S. Reiter – An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), no. 6, 761–798, Algorithmic methods in Galois theory.

[DW03] M. Dettweiler, & S. Wewers – 2003, preprint.

[Fei85] W. Feit – Rigidity of $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_2(p^2))$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$, $p \neq 2$, *Proceedings of the Rutgers group theory year, 1983–1984 (New Brunswick, N.J., 1983–1984)* (Cambridge), Cambridge Univ. Press, 1985, 351–356.

[MM99] G. Malle & B. H. Matzat – *Inverse Galois theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Shi03] T. Shiina – Rigid braid orbits related to $\mathrm{PSL}_2(p^2)$ and some simple groups, *Tohoku Math. J. (2)* **55** (2003), no. 2, 271–282.

[TV99] J. Thompson & H. Völklein – Braid-abelian tuples in $\mathrm{Sp}_n(K)$, Aspects of Galois theory (Gainesville, FL, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 256, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 218–238.

[Völ96] H. Völklein – *Groups as Galois groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 53, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 73–79
Universität Göttingen, 2003-04

ARITHMETIC INTERSECTION THEORY ON COMPACTIFIED SHIMURA VARIETIES

U. Kühn
Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Germany • *E-mail :* kuehn@math.hu-berlin.de

Abstract. We report on recent results in the arithmetic intersection theory on compactified Shimura Varieties.

1. Introduction

The content of this note is based on joint work with J.H. Bruinier, J.I. Burgos and J. Kramer.

1. Motivation. We are interested in Arakelov theory for compactifications of non-compact Shimura varieties where all the analytical data that is required for arithmetic intersection theory is natural. Such a theory must be a generalization of the theory of H. Gillet and C. Soulé [**Sou92**], since the intrinsic metrics have log-log singularities with respect to the boundary. Observe that the existence of such a theory is already used in the following

November 20th, 2003.

1.1. Meta conjecture: *The natural arithmetic intersection numbers of Shimura varieties are essentially given by logarithmic derivatives of L-functions.*

Precise formulations of this philosophy are given by S. Kudla for Shimura varieties of type $O(2,n)$ [**Kud03**], by K. Köhler for the moduli space of abelian varieties $\mathscr{A}_g$ [**K01̈**] and by V. Maillot and D. Rössler for families of (semi) abelian varieties [**MR02**]. Joint work of our group provides evidence for these conjectures (see [**BK03**], [**BBGK03**], [**BGKKb**], [**BGKKa**]).

2. Review of higher dimensional Arakelov theory

Here we collect some of the basic properties of higher dimensional Arakelov theory. For more details and proofs we refer to [**Sou92**]. We let $\pi : X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ be an arithmetic variety. For simplicity we assume that X is a projective, regular scheme flat over $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ whose generic fiber is smooth. We set $d = \dim_{\mathbb{Z}}(X)$. We write $Z^p(X)$ for the free group of p-codimensional cycles on X. It is a fact that for each $Z \in Z^p(X)$ there exists a Green current g_Z, i.e., a current that satisfies

$$\mathrm{dd}^c\, g_Z + \delta_Z = [\omega_Z],$$

where δ_Z denotes the current of integration along $Z(\mathbb{C})$ and $[\omega_Z]$ denotes the current associated with a **smooth** form ω_Z. Then the free group of arithmetic cycles is

$$\widehat{Z}^p(X) = \{(Z, g_Z) \,|\, Z \in Z^p \text{ and } g_Z \text{ a Green current for } Z\}.$$

It contains the subgroup

$$\widehat{Rat}^p(X) = \{(\operatorname{div}(f), g(f)) \,|\, f \text{ a } K_1\text{-chain and } g(f) \text{ a canonical Green current}\}.$$

Finally the p-th arithmetic Chow group (in the sense of Gillet and Soulé) is defined by

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) = \widehat{Z}^p(X)/\widehat{Rat}^p(X).$$

Some of its properties are:

2.1. There exists an *arithmetic degree* map

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X) \arrow[d, "\pi_*"'] \arrow[dr, "\widehat{\deg}"] & \\ \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

2.2. Given a morphism of arithmetic varieties then there exists a push-forward (for proper, generically smooth morphisms only!) and a pull-back for the associated arithmetic Chow groups.

2.3. Each hermitian line bundle $\overline{L}$, i.e., a pair $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ consisting of a line bundle L on X and a **smooth** hermitian metric on the induced bundle $L(\mathbb{C})$, defines a first arithmetic Chern class $\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{L}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$.

2.4. There is an arithmetic intersection product

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}},$$

given by $(Y, g_Y) \otimes (Z, g_Z) \mapsto (Y \cdot Z, g_Y * g_Z)$. The right hand side has to be tensored with $\mathbb{Q}$ since the construction of $Y \cdot Z$ involves K-theory. It is quite technical to show that the star product $g_Y * g_Z = g_Z \delta_Y + g_Y \omega_Z$ is well-defined.

2.5. There is a height pairing

$$Z^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^{d-p+1}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

given by $Z \otimes \alpha \mapsto \mathrm{ht}_\alpha(Z)$. In particular if $\alpha = \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{L})$, then $\mathrm{ht}_\alpha(Z) = \mathrm{ht}_{\overline{L}}(Z)$ is also refered to as the Faltings height with respect to $\overline{L}$.

3. Cohomological arithmetic Chow groups

We briefly describe the arithmetic Chow groups presented in [**BGKKb**]. The main idea is to replace the Green equation $\mathrm{dd}^c\, g_Z + \delta_Z = [\omega_Z]$ by a cohomological relation $\mathrm{cl}(g_Z) = \mathrm{cl}(Z)$ in a suitable cohomology theory.

Recall our assumption that $X(\mathbb{C})$ is compact, therefore

$$g_Z \equiv [g_Z] \mod \operatorname{im}\partial + \operatorname{im}\overline{\partial}$$

for a differential form g_Z with logarithmic singularities along $Z(\mathbb{C})$. In particular g_Z is an element of the Deligne algebra $\mathscr{D}^*_{\log}(X \setminus Z, *)$ of smooth differential forms on $X \setminus Z$ with logarithmic singularities along the boundary. Now the first key observation due to J. Burgos [**Bur97**] is that with respect to the natural isomorphisms

$$H^{2p}\big(\mathscr{D}^{2p}_{\log}(X,p), \mathscr{D}^{2p-1}_{\log}(X \setminus Z, p)\big) \cong H^{2p}_{Z,\mathscr{D}}(X,p) \cong H^{2p}_Z(X,\mathbb{R})$$

we get the identifications

$$\mathrm{cl}\left((\omega_Z, g_Z)\right) \hat{=} \mathrm{cl}(Z) \hat{=} \delta_Z,$$

here the cohomology group in the middle is the Deligne cohomology group with support in the real cycle associated with Z. The second key observation also due to J. Burgos is that it is possible to interpret the star product

$$g_Y * g_Z = g_Z \delta_Y + g_Y \omega_Z$$

as a product of truncated relative cohomology groups

$$\widehat{H}^{2p}\big(\mathscr{D}^{2p}_{\log}(X,p),\mathscr{D}^{2p-1}_{\log}(X\setminus Y,p)\big)\otimes\widehat{H}^{2q}\big(\mathscr{D}^{2p}_{\log}(X,q),\mathscr{D}^{2q-1}_{\log}(X\setminus Z,q)\big)$$
$$\longrightarrow\widehat{H}^{2p+2q}\big(\mathscr{D}^{2p+2q}_{\log}(X,p+q),\mathscr{D}^{2p+2q-1}_{\log}(X\setminus(Y\cap Z,p+q)\big)$$

Note that this interpretation allows us to replace many of the analytical identities used in the proof of the well-definedness by homological identities.

Instead of the sheaf complexes $U\mapsto\mathscr{D}^{*}_{\log}(U,*)$ one could consider other sheaves of complexes. We call a sheaf of complexes that receives classes for cycles and K_1-chains together with some mild compatibility assumptions (see [**BGKKb**], Lemma 3.9.) an arithmetic complex on X. One of the main results in [**BGKKb**] may be stated as follows

Theorem 3.1. *Given an arithmetic complex $\mathscr{C}^*(\cdot,*)$ on X, then there exist arithmetic Chow groups $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X,\mathscr{C})$ whose properties are dictated by the functorial and multiplicative properties of $\mathscr{C}^*(\cdot,*)$.*

It is shown in [**Bur97**] that $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X,\mathscr{D}_{\log})\cong\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$.

4. Arithmetic Chow rings with pre-log-log forms

We let $\pi: X\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ be an arithmetic variety as before. In addition we fix a divisor $D\subset X(\mathbb{C})$ with normal crossings. Let Z be a cycle on X and $\mathscr{D}^*_{\mathrm{pre}}(X\setminus Z)$ be the Deligne algebra of pre-log-log forms with respect to Z. Here a pre-log-log form η with respect to Z is a smooth differential form on $\big(X\setminus(Z\cup D)\big)(\mathbb{C})$ such that η, $\partial\eta$, $\overline{\partial}\eta$ and $\partial\overline{\partial}\eta$ have logarithmic singularities along Z and log-log singularities along D. We have

Theorem 4.1. *The cohomological arithmetic Chow ring*

$$\widehat{\mathrm{CH}}^*(X,\mathscr{D}_{pre})_{\mathbb{Q}}=\bigoplus_p\widehat{\mathrm{CH}}^p(X,\mathscr{D}_{pre})_{\mathbb{Q}}$$

is a non trivial extension of $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbb{Q}}$.

The arithmetic Chow group $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X,\mathscr{D}_{\mathrm{pre}})$ is an extension since $\mathscr{D}_{\log}$ is a sub-complex of $\mathscr{D}_{\mathrm{pre}}$. Since pre-log-log forms with respect to $\emptyset$ are integrable there is an arithmetic degree map

$$\widehat{\deg}:\widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X,\mathscr{D}_{\mathrm{pre}})\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Any line bundle L on X equipped with a logarithmically singular hermitian metric on $L(\mathbb{C})$ with respect to D determines a class in $\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{L})\in\widehat{\mathrm{CH}}^1(X,\mathscr{D}_{\mathrm{pre}})$

that is called the first arithmetic Chern class. We have an arithmetic intersection pairing. There is also a height pairing. More precisely if

$$Z_U^p(X) = \{Z \in Z^p(X) \mid Z(\mathbb{C}) \text{ intersects } D \text{ properly}\},$$

then there is a well defined pairing

$$Z_U^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^{d-p+1}(X, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

given by $Z \otimes \alpha \mapsto \mathrm{ht}_\alpha(Z)$. If $\alpha = \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{L})^{d-p+1}$, then this height is also refered to as Faltings height; because the particular case $X = \mathscr{A}_g$, $\overline{L} = \overline{\mathscr{M}}$ the line bundle of modular forms with its Petersson metric and $p = d$ yields exactly the modular height of abelian varieties as it was used by Faltings in his proof of the Mordell conjecture.

Finally we remark that if our arithmetic variety X is a compactified Shimura variety, i.e., X is an arithmetic variety such that $X(\mathbb{C}) = \overline{\Gamma \setminus G/K}$ where Γ is a discrete subgroup in the automorphism group of a bounded symmetric domain G/K, $D = X(\mathbb{C}) \setminus \big(\Gamma \setminus G/K\big)$ and $\overline{L}$ is an automorphic line bundle equipped with a $G(\mathbb{R})$-invariant metric, then our results of [**BGKKb**],[**BGKKa**] apply. In particular they imply that $\widehat{\deg}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{L})^{d+1}\big)$ is a well-defined number. Numbers of this type are called *arithmetic intersection numbers* on X.

It is known that the geometric intersection numbers for such L are given by special values of L-functions and zeta functions. The above conjecture is that the arithmetic intersection numbers for $\overline{L}$ are essentially given by same special values but now of the logarithmic derivative of the same L-functions and zeta functions.

5. Explicit calculations

The above theory has been proved to be applicable to the following cases.

5.1. Modular curves. For simplicity we consider the elliptic modular curve $\pi : X(1) \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ and its line bundle of modular forms $\overline{\mathscr{M}}_k$ of weight k equipped with the Petersson metric. It is well known that $X(1)(\mathbb{C}) = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2}$ and that the global sections of $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ are holomorphic modular forms of weight k. In 1998 the author and independently also J.-B. Bost proved the following

Theorem 5.1. [**Küh01**] *Let $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ be the Riemann zeta function, then the arithmetic self intersection number of the line bundle of modular forms with its*

Petersson metric is given by

$$\widehat{\deg}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_k)^2\big) = k^2\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\left(\frac{\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)}+\frac{1}{2}\right).$$

5.2. Products of modular curves. We consider the arithmetic threefold $H = X(1)\times X(1)$ and on it the line bundle of bi-modular forms $\overline{L}_k = p_1^*\overline{\mathscr{M}}_k \otimes p_2^*\overline{\mathscr{M}}_k$ of weight k. Then functoriality and the previous result imply

Theorem 5.2. [**BGKKb**] *The arithmetic self intersection number of the line bundle $\overline{L}_k$ of bi-modular forms on H is given by*

$$\widehat{\deg}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_k)^3\big) = \frac{k^3}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\left(\frac{\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)}+\frac{1}{2}\right).$$

5.3. Hilbert modular surfaces. Let K be a real quadratic number field. We write $\mathscr{O}_K$ for its ring of integers. The complex surface $\mathrm{SL}_2(\mathscr{O}_K)\setminus\mathbb{H}^2$ is called the Hilbert modular surface associated to K. Let $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathscr{O}_K)\setminus\mathbb{H}^2}$ be a compactified desingularisation of it. Assume that the discriminant D_K of K is a prime congruent to 1 modulo 4. To ease notation we assume that there exists an arithmetic variety $\pi : H \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ such that $H(\mathbb{C}) = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathscr{O}_K)\setminus\mathbb{H}^2}$. It is not known whether such an arithmetic threefold exist. However, if we consider certain congruence subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathscr{O}_K)$, then there exists such arithmetic threefolds over certain subrings of cyclotomic fields.

Theorem 5.3. [**BBGK03**] *Under the above simplifying assumption, the arithmetic self intersection number of the line bundle $\overline{\mathscr{M}}_k$ of Hilbert modular forms on H is given by*

$$\widehat{\deg}\big(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_k)^3\big) = k^3\zeta_K(-1)\left(\frac{\zeta'_K(-1)}{\zeta_K(-1)}+\frac{\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log(D_K)\right),$$

where $\zeta_K(s)$ is the Dedekind zeta function and D_K is the discriminant of K.

References

[BBGK03] J. Bruinier, J. Burgos Gil & U. Kühn – Borcherds products and arithmetic intersection theory on Hilbert modular surfaces, 2003, `arXiv.org/math.NT/0310201`.

[BGKKa] J. Burgos Gil, J. Kramer & U. Kühn – Arithmetic characteristic classes for automorphic vector bundles, in preparation.

[BGKKb] ———, On cohomological arithmetic Chow rings, Preprint, `http://www.institut.math.jussieu.fr/Arakelov/0012/`.

[BK03] J. H. Bruinier & U. Kühn – Integrals of automorphic Green's functions associated to Heegner divisors, *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 31, 1687–1729.

[Bur97] J. I. Burgos – Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology, *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), no. 2, 335–377.

[KÖ1] K. Köhler – A Hirzebruch proportionality principle in Arakelov Geometry, 2001, Preprint Jussieu.

[Kud03] S. Kudla – Special cycles and derivatives of Eisenstein series, 2003, Proceeding of the MSRI workshop on special values of Rankin L-series, to appear.

[Küh01] U. Kühn – Generalized arithmetic intersection numbers, *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), 209–236.

[MR02] V. Maillot & D. Roessler – Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs, *Math. Res. Lett.* **9** (2002), no. 5-6, 715–724.

[Sou92] C. Soulé – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 81–90
Universität Göttingen, 2003-04

LOKALE MODELLE VON SHIMURA-VARIETÄTEN UND IHRE GARBEN DER VERSCHWINDENDEN ZYKEL

U. Görtz
Mathematisches Institut der Universität Bonn, Beringstr. 6, 53115 Bonn, Germany • *E-mail :* ugoertz@math.uni-bonn.de

Abstract. Local models are schemes defined in terms of linear algebra which describe the singularities of the bad reduction of certain Shimura varieties of PEL type (with parahoric level structure). The sheaf of nearby cycles is a sheaf on the special fibre which contains information about the singularities. Since the special fibre of a local model can be identified with a union of Schubert varieties in an affine flag variety, the trace of Frobenius on the sheaf of nearby cycles is an element in the Iwahori-Hecke algebra. The coefficients of this element with respect to the Kazhdan-Lusztig basis show an interesting pattern which can, on the one hand, be described combinatorially, and which on the other hand is related to the cohomology of certain intersections of Schubert cells with opposite Schubert varieties in the affine flag variety. This is joint work with Thomas Haines.

1. Definition des lokalen Modells

Lokale Modelle beschreiben die Singularitäten der schlechten Reduktion gewisser Shimura-Varietäten. Sie sind rein in Termen linearer Algebra definiert, und daher wesentlich leichter zu verstehen als die entsprechenden Shimura-Varietäten.

November 24th, 2003.

Die Theorie der lokalen Modelle wurde entwickelt von Rapoport, de Jong, Zink und anderen (siehe [**RZ96**] für Details und weitere Literaturverweise).

1.1. Der lineare Fall. Wir fixieren natürliche Zahlen $0 < r < n$ und bezeichnen mit $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}_p^n$. Für $i = 0, \dots, n-1$ sei $\Lambda_i = \langle p^{-1}e_1, \dots, p^{-1}e_i, e_{i+1}, \dots, e_n\rangle_{\mathbb{Z}_p} \subseteq \mathbb{Q}_p^n$. Wir haben also eine Gitterkette

$$\cdots \Lambda_0 \subseteq \Lambda_1 \subseteq \cdots \subseteq \Lambda_{n-1} \subseteq p^{-1}\Lambda_0 \subseteq \cdots$$

Das lokale Modell $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}}$ ist das $\mathbb{Z}_p$-Schema, das den folgenden Funktor darstellt: Einem $\mathbb{Z}_p$-Schema S ordnen wir die Menge der Isomorphieklassen kommutativer Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{0,S} \arrow[r] & \Lambda_{1,S} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Lambda_{n-1,S} \arrow[r, "p"] & \Lambda_{0,S} \\
\mathscr{F}_0 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathscr{F}_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r] & \mathscr{F}_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathscr{F}_0 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

zu, wobei $\Lambda_{i,S} = \Lambda_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_S$ und wobei $\mathscr{F}_i \subseteq \Lambda_{i,S}$ ein lokal-freier $\mathscr{O}_s$-Modul vom Rang r ist, der lokal auf S ein direkter Summand ist.

Bemerkung 1.1. Offenbar ist dieser Funktor tatsächlich darstellbar; $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}}$ ist ein abgeschlossenes Unterschema in einem Produkt von Grassmannschen. Ist p invertierbar auf S, so sind die Abbildungen zwischen den $\Lambda_{i,S}$ alle Isomorphismen. In diesem Fall ist daher die ganze Familie $(\mathscr{F}_i)_i$ durch $\mathscr{F}_0$ bestimmt, und deswegen ist die generische Faser $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}}_{\mathbb{Q}_p}$ einfach eine Grassmannsche und insbesondere glatt über $\mathbb{Q}_p$.

Beispiel 1.2. Zur Illustration betrachten wir den Fall $n = 2$, $r = 1$. Wir haben $\Lambda_{0,S} \cong \mathscr{O}_S^2$ und $\Lambda_{1,S} \cong \mathscr{O}_S^2$ mittels der in der Definition gegebenen Basen von Λ_i, und betrachten daher das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_S^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \mathscr{O}_S^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}"] & \mathscr{O}_S^2 \\
\mathscr{F}_0 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathscr{F}_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathscr{F}_0 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

In einer offenen Umgebung der schlechtesten Singularität der speziellen Faser können wir $\mathscr{F}_0$ als den von einem Vektor der Form $\binom{1}{x}$ erzeugten Untermodul, und $\mathscr{F}_1$ als den von einem Vektor der Form $\binom{y}{1}$ erzeugten Untermodul beschreiben. Die Bedingung, dass das Bild von $\mathscr{F}_0$ in $\mathscr{F}_1$ enthalten ist, liefert dann die Gleichung $xy = p$, und aus der Bedingung, dass das Bild von $\mathscr{F}_1$ in $\mathscr{F}_0$ enthalten ist, erhalten wir $yx = p$. Wir sehen also: die spezielle Faser des lokalen Modells ist in diesem Fall die Vereinigung von zwei projektiven Geraden, die sich in einem Punkt transversal schneiden.

Im allgemeinen Fall kann man das lokale Modell in ähnlicher Weise durch Matrixgleichungen beschreiben; diese sind aber erheblich komplizierter, vgl. [**Gör01**].

1.2. Der symplektische Fall. Wir definieren noch die folgende Variante: Sei $0 < r$ eine ganze Zahl, und sei $n = 2r$. Das symplektische lokale Modell ist das abgeschlossene Unterschema des linearen Modells zu r und $n = 2r$, das den folgenden Funktor darstellt:

$$\mathbf{M}^{\mathrm{sympl}}(S) =$$

$$\{(\mathscr{F}_i)_i \in \mathbf{M}^{\mathrm{loc}}(S);\ \forall i \text{ ist } \mathscr{F}_i \to \Lambda_{i,S} \cong \widehat{\Lambda}_{2r-i,S} \to \widehat{\mathscr{F}}_{2r-i} \text{ die Nullabbildung}\}.$$

Hier bezeichnet $\widehat{\cdot}$ das $\mathscr{O}_S$-Dual, und der Isomorphimus $\Lambda_{i,S} \cong \widehat{\Lambda}_{2r-i,S}$ sei der durch die symplektische Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\langle e_i, e_{2r-j+1}\rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq r$, gegebene.

Die Dualitätsbedingung besagt also, dass $\mathscr{F}_0$ und $\mathscr{F}_r$ total isotrop sind, und dass $\mathscr{F}_{2r-i}$ durch $\mathscr{F}_i$ bestimmt ist $(0 < i < r)$.

Wie im linearen Fall ist der obige Funktor darstellbar, und die generische Faser ist glatt.

1.3. Beziehung zu Shimura-Varietäten. Lokale Modelle beschreiben die Singularitäten gewisser Modelle von Shimura-Varietäten vom PEL-Typ mit Iwahori-Niveaustruktur. Wir illustrieren das am einfachsten Beispiel, nämlich dem der symplektischen Gruppe GSp_{2r}.

Die Shimura-Varietät ist in diesem Fall der folgende Modulraum (wir fixieren N mit $(p,N)=1$):

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}(S) & = & \{(A_0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_r, \lambda_0, \lambda_r, i_N); \\ & & \bullet\ A_i \text{ abelsches Schema der Dimension } r \text{ über } S \\ & & \bullet\ A_i \to A_{i+1} \text{ Isogenie der Ordnung } p \\ & & \bullet\ \lambda_0, \lambda_1 \text{ prinz. Polarisierungen von } A_0 \text{ bzw. } A_r \\ & & \bullet\ i_N \text{ Niveaustruktur ausserhalb von } p, \\ & & \text{s. d. die Verkettung} \\ & & A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_r \cong A_r^\vee \to A_{r-1}^\vee \to \cdots \to A_0^\vee \cong A_0 \\ & & \text{gerade } p \cdot \mathrm{id}_{A_0} \text{ ist.}\} \end{array}$$

Aus einer Kette $A_0 \to \cdots \to A_r$ erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^1_{dR}(A_0/S) & H^1_{dR}(A_1/S) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & H^1_{dR}(A_r/S) \arrow[l] \\ \omega_0 \arrow[u, hook] & \omega_1 \arrow[l] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[l] & \omega_r \arrow[l] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(hier bezeichnet $\omega_i \subseteq H^1_{dR}(A_i/S)$ die Hodge-Filtrierung). Wir definieren nun ein $\mathbb{Z}_p$-Schema $\mathscr{W}$ durch

$$\mathscr{W}(S) = \{(((A_i)_i, \lambda_0, \lambda_r, i_N) \in \mathscr{A}(S), \psi);\ \psi\colon\ (H^1_{dR}(A_i/S))_i \xrightarrow{\cong} (\Lambda_{i,S})_i\ \},$$

und bekommen ein Diagramm von $\mathbb{Z}_p$-Schemata

$$\mathscr{A} \xleftarrow{\Phi} \mathscr{W} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{M}^{\mathrm{loc}}\ ,$$

wobei Φ einfach durch Vergessen des Isomorphismus ψ gegeben ist und das Bild eines Punktes unter Ψ gegeben ist durch die von den Hodge-Filtrierungen unter dem Isomorphismus ψ induzierte Familie von Unterräumen in der Gitterkette $(\Lambda_i)_i$. Die Abbildung Φ ist ein Torsor unter dem glatten affinen Gruppenschema der Automorphismen der Gitterkette $(\Lambda_i)_i$, und mit Hilfe der Theorie von Grothendieck und Messing, die —grob gesprochen— besagt, dass die Deformationen einer abelschen Varietät bestimmt sind durch die Deformationen der Hodge-Filtrierung, kann man zeigen, dass die Abbildung Ψ glatt ist. Genauer gilt sogar, dass étale-lokal um jeden Punkt der speziellen Faser $\mathscr{A}$ und $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}}$ isomorph sind. Für Details siehe [**RZ96**]. Das lokale Modell hat also sozusagen die gleichen Singularitäten wie unser Modell der Shimura-Varietät, und man kann entsprechende Aussagen über das lokale Modell auf das Modell der Shimura-Varietät übertragen.

Beispiel 1.3. Kommen wir noch einmal zurück auf den Fall $r = 1$, $n = 2$. In diesem Fall betrachten wir den Modulraum elliptischer Kurven mit Niveaustruktur in p vom Typ $\Gamma_0(p)$. Es ist bekannt, dass die spezielle Faser dieses Modulraums durch Verkleben zweier Modulkurven in den supersingulären Punkten entsteht; in diesen Punkten schneiden sich die beiden Kurven transversal. Lokal um einen dieser Schnittpunkte hat der Modulraum also in der Tat die selbe Gestalt wie das lokale Modell in diesem Fall (s.o.).

2. Beziehung zur affinen Flaggenvarietät

Ein anderer Kontext, in dem lokale Modelle in natürlicher Weise auftreten, und der sehr nützlich ist zum Studium ihrer Eigenschaften, ist der der affinen Flaggenvarietät.

Im folgenden beschränken wir uns stets auf den linearen Fall.

2.1. Die affine Grassmannsche und die affine Flaggenvarietät. Sei k ein Körper und sei $G = GL_n$. Wir fixieren die Borel-Untergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen und den maximalen Torus T der Diagonalmatrizen.

Die affine Grassmannsche Grass ist ein ind-Schema über k, das sich definieren lässt als der fpqc-Quotient $G(k(\!(t)\!))/G([\![t]\!])$. Hierbei wird $G(k(\!(t)\!))$ als ind-Schema über k aufgefasst (siehe [**BL94**], [**Fal03**]).

Andererseits haben wir eine modulare Beschreibung der affinen Grassmannschen; ist R eine k-Algebra, so ist

$$\mathrm{Grass}(R) = \{\mathscr{L} \subset R(\!(t)\!) \text{ Gitter über } R[\![t]\!]\}.$$

Wir haben eine Stratifizierung

$$\mathrm{Grass}_k = \coprod_{\mu \text{ dom. Kogew.}} G(k[\![t]\!])t_\mu G(k[\![t]\!])/G(k[\![t]\!]).$$

Wir schreiben $Q_\mu = G(k[\![t]\!])t_\mu G(k[\![t]\!])/G(k[\![t]\!])$. Der Abschluss eines Stratums ist Vereinigung von Strata, genauer gilt

$$\overline{Q_\mu} = \coprod_{\lambda \leq \mu} Q_\lambda,$$

wobei $\leq$ die übliche partielle Ordnung auf der Menge der dominanten Kogewichte bezeichnet.

Desweiteren betrachten wir die affine Flaggenvarietät Flag. Diese ist ebenfalls ein ind-Schema über k, definiert als der fpqc-Quotient $G(k(\!(t)\!))/\mathscr{B}$, wobei $\mathscr{B} \subseteq G(k[\![t]\!])$ die Standard-Iwahori-Untergruppe bezeichnet: $\mathscr{B}$ ist das Urbild von B unter der Projektion $G(k[\![t]\!]) \longrightarrow G(k)$. Wir können $\mathscr{B}$ auch beschreiben als den Stabilisator der Standard-Gitterkette $(\lambda_i)_i$, $\lambda_i = t^{-1}k[\![t]\!]^i \oplus k[\![t]\!]^{n-i} \subseteq$

$k[\![t]\!]^n$. Ähnlich wie für die affine Grassmannsche lässt sich die affine Flaggenvarietät als Modulraum beschreiben, nämlich als der Modulraum der vollständigen periodischen Gitterketten. Für eine k-Algebra R gilt

$$\mathrm{Flag}(R) = \{(\mathscr{L}_i)_i;\ \mathscr{L}_0 \subset \cdots \subset \mathscr{L}_{n-1} \subset t^{-1}\mathscr{L}_0 \subset R(\!(t)\!) \text{ vollst. Gitterkette}\}.$$

Wir haben eine Stratifizierung

$$\mathrm{Flag} = \coprod_{w \in \widetilde{W}} \mathscr{B}w\mathscr{B}/\mathscr{B}.$$

(Hier bezeichnet $\widetilde{W}$ die erweiterte affine Weyl-Gruppe. Wir schreiben $\mathscr{B}_w = \mathscr{B}w\mathscr{B}/\mathscr{B}$. Es ist dann $\mathscr{B}$ isomorph zum affinen Raum der Dimension $\ell(w)$ (Länge von w in der erweiterten affinen Weyl-Gruppe). Ferner gilt

$$\overline{\mathscr{B}_w} = \coprod_{v \leq w} \mathscr{B}_v,$$

wobei $\leq$ die Bruhat-Ordnung bezeichnet. Die Abschlüsse $\overline{\mathscr{B}_w}$ werden als (affine) Schubert-Varietäten bezeichnet und sind endlich-dimensionale projektive Varietäten.

Wir können die Flaggenvarietät noch in anderer Weise stratifizieren. Sei dazu $\mathscr{N}^-$ das Urbild des unipotenten Radikals der gegenüberliegenden Borel-Untergruppe zu B unter der Projektion $G(k[t^{-1}]) \longrightarrow G(k)$. Wir haben dann

$$\mathrm{Flag} = \coprod_{w \in \widetilde{W}} \mathscr{N}^- w\mathscr{B}/\mathscr{B}.$$

Wir schreiben $\mathscr{B}^w = \mathscr{N}^- w\mathscr{B}/\mathscr{B}$; die $\mathscr{B}^w$ sind keine Schemata, sondern nur ind-Schemata. Es gilt dann

$$\overline{\mathscr{B}^w} = \coprod_{v \geq w} \mathscr{B}^v,$$

insbesondere ist im Fall $\ell(w) = 0$ der Abschluss $\overline{\mathscr{B}^w}$ eine ganze Zusammenhangskomponente der affinen Flaggenvarietät.

Für $v, w \in \widetilde{W}$ gilt $\mathscr{B}_w \cap \mathscr{B}^v \neq \emptyset$ genau dann, wenn $v \leq w$, und in diesem Fall ist $\dim \mathscr{B}_w \cap \mathscr{B}^v = \ell(w) - \ell(v)$.

Bemerkung 2.1. In gewissem Maß verhalten sich diese beiden Stratifizierungen also gerade so wie in der gewöhnlichen Flaggenvarietät die Stratifizierungen, die durch die Orbiten unter der Borel-Gruppe einerseits und die Orbiten unter der gegenüberliegenden Borel-Gruppe andererseits gegeben sind. Insbesondere gilt das unten angesprochene Theorem von Kazhdan und Lusztig in diesem Sinne auch für die gewöhnliche Flaggenvarietät. Im Fall der gewöhnlichen Flaggenvarietät liegen die Dinge natürlich insofern einfacher, als bei beiden Stratifizierungen die Strata einfach affine Räume sind; im Fall der affinen Flaggenvarietät sind die Strata $\mathscr{B}^w$ aber nur ind-Schemata.

2.2. Eine Verallgemeinerung der lokalen Modelle. Es existiert eine Deformation von $\mathrm{Grass}_{\mathbb{Q}_p}$ nach $\mathrm{Flag}_{\mathbb{F}_p}$, das heisst ein flaches ind-Schema $\mathfrak{X}$ über $\mathbb{Z}_p$ mit generischer Faser $\mathrm{Grass}_{\mathbb{Q}_p}$ und spezieller Faser $\mathrm{Flag}_{\mathbb{F}_p}$. Für den arithmetischen Fall siehe [**HN02**], für den Funktionenkörperfall siehe [**Gai01**]. Mit M_μ bezeichnen wir nun den schema-theoretischen Abschluss der Zelle $Q_\mu \subseteq \mathrm{Grass}_{\mathbb{Q}_p}$ in $\mathfrak{X}$. Dies ist ein $\mathbb{Z}_p$-Schema, dessen generische Faser gerade der Abschluss von Q_μ in $\mathrm{Grass}_{\mathbb{Q}_p}$ ist, und dessen spezielle Faser ein $\mathscr{B}$-invariantes Unterschema von $\mathrm{Flag}_{\mathbb{F}_p}$ ist.

In dem speziellen Fall, dass μ minuscule, also von der Form $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ist, erhalten wir gerade das oben definierte lokale Modell zurück. (Dabei ist r die Anzahl der 1 in μ.) Um das einzusehen, muss man sich natürlich die Definition des ind-Schemas $\mathfrak{X}$ anschauen (dann ist es aber offensichtlich). Immerhin ist es aber leicht direkt zu sehen, dass sich die spezielle Faser des lokalen Modells als abgeschlossenes Unterschema in die affine Flaggenvarietät über $\mathbb{F}_p$ einbetten lässt. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{M}^{\mathrm{loc}} \otimes \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \{(\mathscr{L}_i)_i \in \mathrm{Flag};\ t\lambda_i \subseteq \mathscr{L}_i \subseteq \lambda_i \text{ für alle } i\} \subseteq \mathrm{Flag}_{\mathbb{F}_p} \\ (\mathscr{F}_i)_i & \mapsto & (\mathscr{L}_i)_i, \end{array}$$

wobei $\mathscr{L}_i$ das Urbild von $\mathscr{F}_i$ unter der Projektion

$$\lambda_i \longrightarrow \lambda_i / t\lambda_i \cong \Lambda_{i,\mathbb{F}_p}$$

bezeichnet, bildet $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}} \otimes \mathbb{F}_p$ isomorph auf ein abgeschlossenes Unterschema von Flag ab.

Mittels dieser Einbettung und der Theorie der Frobenius-Splittings kann man das folgende Theorem beweisen (siehe [**Gör01**]).

Theorem 2.2. *Die spezielle Faser des lokalen Modells ist der schema-theoretische Durchschnitt gewisser Schubert-Varietäten und daher reduziert. Das lokale Modell* $\mathbf{M}^{\mathrm{loc}}$ *ist flach über* $\mathbb{Z}_p$. *Die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser sind normal mit rationalen Singularitäten, also insbesondere Cohen-Macaulay.*

3. Die Garbe der nearby cycles

Die Garbe der nearby cycles $R\Psi = R\Psi(IC(\overline{Q_\mu}))$ ist eine 'Garbe' auf der speziellen Faser des lokalen Modells, die Informationen über die Singularitäten kodiert. (Genau genommen handelt es sich um eine ($\mathscr{B}$-äquivariante) ℓ-adische perverse Garbe. Diesen technischen Punkt werden wir im folgenden aber einfach ignorieren. Da die generische Faser von M_μ im allgemeinen nicht glatt ist, wenden wir den nearby-cycles-Funktor $R\Psi$ hier nicht auf die konstante Garbe an, sondern auf den Schnittkomplex der generischen Faser. Im Fall des ursprünglichen lokalen Modells ist die generische Faser natürlich immer glatt, so dass der Schnittkomplex in diesem Fall einfach die (geshiftete) konstante Garbe ist.)

Die einfachen Bestandteile von $R\Psi$ haben die Form $IC(\overline{\mathscr{B}_w})[\ell(w)](-i)$ mit $i \in \mathbb{Z}$. Hier bezeichnet $IC(\overline{\mathscr{B}_w})$ den (nicht verschobenen und nicht getwisteten) Schnittkomplex der Schubertvarietät zu w. Wir haben also

$$R\Psi^{ss} = \bigoplus_w \bigoplus_i IC(\overline{\mathscr{B}_w})[\ell(w)](-i)^{\oplus m(w,i)}$$

für gewisse nicht-negative ganze Zahlen $m(w,i)$.

Wir wollen eine Beschreibung dieser Multiplizitäten $m(w,i)$ angeben.

Da $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, R\Psi_x)$ bekannt ist (aus der Kottwitz-Vermutung, bewiesen von Gaitsgory [**Gai01**] und Haines/Ngô [**HN02**]), und $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, IC(\overline{\mathscr{B}_w})_x)$ durch ein Kazhdan-Lusztig-Polynom gegeben ist, lassen sich die $m(w,i)$ durch absteigende Induktion nach der Länge von w explizit ausrechnen. (Allerdings ist das in fast allen Fällen nur mit Hilfe eines Computerprogramms durchführbar.)

Beispiel 3.1. Im sogenannten Drinfeld-Fall, d.h. $\mu = (1, 0, \dots, 0)$ hat M_μ semi-stabile Reduktion und es gilt

$$m(w,i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \dots, \ell(t_\mu) - \ell(w) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im allgemeinen sind die Multiplizitäten wesentlich komplizierter; siehe [**GH04**] für weitere Beispiele.

Theorem 3.2. *Es gilt*

$$\sum_i m(w,i) q^i = (-1)^{\ell(t_\mu)} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, H_c^\bullet(\mathrm{Flag}, R\Psi \otimes IC(\overline{\mathscr{B}^w}))).$$

Zum Beweis: Um das Theorem zu beweisen (und um überhaupt seiner Aussage einen Sinn zu geben), muss man zunächst einmal definieren, was unter dem Schnittkomplex $IC(\overline{\mathscr{B}^w})$ zu verstehen ist, denn schliesslich ist $\overline{\mathscr{B}^w}$ kein Schema, sondern nur ein ind-Schema. Man kann aber eine Garbe auf Flag definieren, die die gewünschten Eigenschaften hat, indem man endlich-dimensionale Quotienten gewisser offener Teile der Flaggenvarietät betrachtet.

Des weiteren braucht man zum Beweis das folgende Theorem von Kazhdan und Lusztig (das in [**KL80**] genannt, aber dort nur im endlich-dimensionalen Fall bewiesen wird).

Theorem 3.3. *Es gilt*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, IH^\bullet(\overline{\mathscr{B}^w} \cap \mathscr{B}_y)) = \sum_i \dim IH^{2i}(\overline{\mathscr{B}^v} \cap \mathscr{B}_y)q^i = Q_{v,y}(q).$$

Hier bezeichnet $Q_{v,y}$ das inverse Kazhdan-Lusztig-Polynom zu v und y. Man beachte, dass in der Aussage des Theorems nur endlich-dimensionale Schemata vorkommen. Dennoch benötigt man auch zum Beweis des Theorems von Kazhdan und Lusztig den Schnittkomplex $IC(\overline{\mathscr{B}^w})$. Für Details siehe [**GH04**].

Schliesslich erhalten wir noch das folgende

Korollar 3.4. *Für das null-dimensionale Stratum $\mathscr{B}_\tau \subset M_\mu \otimes \mathbb{F}_p$ gilt*

$$\begin{aligned}\sum_i m(\tau,i)q^i &= (-1)^{\ell(t_\mu)}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, H_c^\bullet(\mathrm{Flag}, R\Psi)) \\ &= \sum_i \dim IH^{2i}(Q_\mu)q^i.\end{aligned}$$

Für das null-dimensionale Stratum erhalten wir also eine sehr einfache Beschreibung der Multiplizitäten; es sind einfach die Schnitt-Betti-Zahlen der generischen Faser (allerdings liegt die Zelle Q_μ, die im Korollar "in natürlicher Weise" auftritt, in der affinen Grassmannschen über $\mathbb{F}_p$). Das ist insofern bemerkenswert, als man zur expliziten Berechnung der Multiplizitäten wie oben angedeutet mittels absteigender Induktion nach der Länge vorgeht, und folglich zur Berechnung der Multiplizitäten des nulldimensionalen Stratums alle anderen bereits kennen muss, diese also in gewissem Sinne die kompliziertesten Multiplizitäten sind.

References

[BL94] A. Beauville & Y. Laszlo – Conformal blocks and generalized theta functions, *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no. 2, 385–419.

[Fal03] G. Faltings – Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **5** (2003), no. 1, 41–68.

[Gai01] D. Gaitsgory – Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles, *Invent. Math.* **144** (2001), no. 2, 253–280.

[GH04] U. Görtz & T. J. Haines – The Jordan-Hoelder series for nearby cycles on some Shimura varieties and affine flag varieties, 2004, preprint Bonn, `arXiv:math.AG/0402143`.

[Gör01] U. Görtz – On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type, *Math. Ann.* **321** (2001), no. 3, 689–727.

[HN02] T. Haines & B. C. Ngô – Nearby cycles for local models of some Shimura varieties, *Compositio Math.* **133** (2002), no. 2, 117–150.

[KL80] D. Kazhdan & G. Lusztig – Schubert varieties and Poincaré duality, Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, 185–203.

[RZ96] M. Rapoport & T. Zink – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 91–98
Universität Göttingen, 2003-04

INTERSECTION HOMOLOGY D–MODULES IN FINITE CHARACTERISTIC

M. Blickle
Universität Essen, FB 6, Mathematik, 45117 Essen, Germany
E-mail : manuel.blickle@uni-essen.de

Abstract. I discuss a finite characteristic analog of the theory of D-modules.

1. Introduction

Let Y be a closed codimension c subvariety of the smooth $\mathbb{C}$ variety X and let Z be the singular locus of Y. Denote by $\mathscr{D}_X$ the sheaf or differential operators on X. In [**BK81**], Brylinski and Kashiwara show the existence (and usefulness) of a unique holonomic $\mathscr{D}_X$ module $\mathscr{L} = \mathscr{L}(Y, X)$ satisfying the properties

$$\mathscr{L}|_{X-Z} \cong \mathscr{H}^c_{Y-Z}(X - Z, \mathscr{O}_{X-Z})$$
$$\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{L}) = \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{L}^*) = 0,$$

where the star stands for duality of holonomic $\mathscr{D}$–modules and $\mathscr{H}^i_Y$ denotes the higher derived sections with support in Y. The proof of this result is

November 26st, 2003.

rather formal and uses duality theory for holonomic $\mathscr{D}_X$–modules. Furthermore, they show that $\mathscr{L}(Y,X)$ is the unique simple, selfdual holonomic $\mathscr{D}_X$–module agreeing with $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ on $X-Z$. This result is obtained by showing that $\mathscr{L}(Y,X)$ corresponds, via the Riemann–Hilbert correspondence, to the intersection homology complex π_Y of middle perversity, which, by construction, is simple and selfdual. All these constructions, such as holonomicity, duality and the Riemann–Hilbert correspondence completely rely on characteristic zero – on analytic techniques even, if one is strict. Thus it seems natural to ask:

What happens if X is defined over a field of positive characteristic?

Somewhat surprisingly, the existence of a unique simple $\mathscr{D}_X$–submodule $\mathscr{L}(Y,X)$ can be proved almost independently of the characteristic. The key ingredient – the proof of which is characteristic dependent though – is that $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ has finite length as a $\mathscr{D}_X$–module. This is guaranteed by holonomicity in characteristic 0 and by [**Lyu97**, Theorem 5.7] in positive characteristic, respectively. The other ingredient is the fact that if Y is smooth, then $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ is $\mathscr{D}_X$–simple. This can be seen since the latter module corresponds via Kashiwara's equivalence (which holds independently of characteristic) to the $\mathscr{D}_Y$–module $\mathscr{O}_Y$, which is simple.

Theorem 1. *Let X be a smooth k–variety and let Y be a closed irreducible subvariety of codimension c. Then $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ has a unique simple $\mathscr{D}_X$–submodule $\mathscr{L}(Y,X)$. Furthermore, $\mathscr{L}(Y,X)$ agrees with $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ on $X-\operatorname{Sing}Y$.*

Proof. Write $Z=\operatorname{Sing}Y$ and denote the inclusion $i: X-Z\longrightarrow X$. Since $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ has finite length as a $\mathscr{D}_X$–module it has some simple non-zero $\mathscr{D}_X$–submodule

$$\mathscr{L}\subseteq \mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)\subseteq i_*\mathscr{H}^c_{Y-Z}(X-Z,\mathscr{O}_{Y-Z}).$$

By adjointness of i_* and i^* the inclusion corresponds to an inclusion

$$0\neq \mathscr{L}|_{X-Z}\subseteq \mathscr{H}^c_{Y-Z}(X-Z,\mathscr{O}_{Y-Z})$$

Since the latter module is $\mathscr{D}_X$–simple it follows that we have equality in the last equation. Since this holds for any simple submodule of $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ the same argument shows that any two such have nonzero intersection, thus they are equal. □

This existence proof gives very little information about the concrete structure of $\mathscr{L}(Y,X)$. Even (or especially) in characteristic zero, to explicitly determine $\mathscr{L}(Y,X)$ is difficult. The best results in this case are due to Vilonen [**Vil85**] for Y a complete intersection with an isolated singularity.

The rest of this note will be concerned with explicitly determining $\mathscr{L}(Y,X)$ in positive characteristic.

The strategy is to substitute the D_X–module structure by incorporating the action of the Frobenius on $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$. In other words (alluding to the Riemann–Hilbert correspondence) we replace the de Rham sequence by the Artin–Schreier sequence.

The reason why this is possible is the close relationship between so called *unit $\mathscr{O}_X[F]$–structures* and $\mathscr{D}_X$–structures, described in [**Lyu97, Bli03, EK00**]. Though there is much that can be said about this interesting connection I only use today one consequence of it, namely that $\mathscr{L}(Y,X)$ is equally well characterized by being the unique simple unit $\mathscr{O}_X[F]$–submodule of $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$. The rest of this talk is structured as follows:

1. First, I give a brief introduction into $\mathscr{O}_X[F]$ modules – in fact into an affine version of it which will suffice for the purpose of this talk.
2. Secondly, a local description of $\mathscr{L}(Y,X)$ is given, relating it to a the theory of tight closure. Simplicity criteria for $\mathscr{H}^c_Y(X,\mathscr{O}_X)$ are derived.
3. Finally, I'll discuss an application to curves and mention how the results are embedded in Emerton and Kisin's Riemann–Hilbert type correspondence in positive characteristic.

2. Background on $R[F]$–modules

Let R denote a regular local noetherien k–algebra of dimension n and let k have positive characteristic p. For an ideal I of height c denote the quotient R/I by A; thus the dimension of A is $d=n-c$.

The *(absolute) Frobenius map* on R, *i.e.* the ring map sending each element to its pth power, we denoted by $F=F_R$. The associated map on $X=\operatorname{Spec} R$ is denoted by the same letter $F=F_X$. The pullback of a R–module M by F^e is $F^{e*}M=M^e\otimes M$ where M^e denotes the $R-R$–bimodule which has the normal left R–structure whereas the right R–structure is via F^e.

Definition 2. An *$R[F]$–module* is an R–module M together with an R–linear map

$$\vartheta : F^*M = R^1\otimes M \longrightarrow M.$$

If ϑ is an isomorphism, then (M,ϑ) is called a *unit $R[F]$–module*.

By adjointness, the maps $\vartheta\in\operatorname{Hom}(F^*M,M)$ are in one-to-one correspondence with maps $F_M\in\operatorname{Hom}(M,F_*M)$, *i.e.* F_M satisfies $F_M(rm)=r^pF_M(m)$.

Therefore, an $R[F]$–module is nothing but a module over the non-commutative ring

$$R[F] = \frac{R\langle F\rangle}{r^pF - Fr},$$

where F acts on M via F_M. Then the category of $R[F]$–modules, is the category of left modules over this ring $R[F]$. The category replacing the category of holonomic D_R–modules in characteristic p in this context is the *category of finitely generated unit $R[F]$–modules.* By results of Lyubeznik it has the following desirable properties:

- It is an abelian category, closed under kernels and cokernels in the category of unit $R[F]$–modules.
- All objects have finite length.

Now I give some examples of finitely generated unit $R[F]$–modules explaining that $H^c_I(R)$ is such a module (in fact, all local cohomology modules are).

1. R itself via the natural isomorphism $R^1 \otimes_R R \cong R$ sending $r \otimes t$ to rt^p and conversely r to $r \otimes 1$. Since R is finitely generated already as an R–module, it is finitely generated as an $R[F]$–module.
2. A localization R_f of R at an element $f \in R$ via the natural map $R^1 \otimes R_f \longrightarrow R_f$. The inverse is the map $rs^{-1} \mapsto s^{p-1}r \otimes s^{-1}$ which is to be thought of as "$rs^{-1} \otimes 1$" making it clear that it is an inverse. Even though R_f is not finitely generated as an R–module it is generated by f^{-1} as an $R[F]$–module. Just observe that $F^e(f^{-1}) = f^{-p^e}$. Thus R_f is a finitely generated unit $R[F]$–module.
3. The local cohomology modules, $H^i_I(R)$, of R with support in an ideal I can be computed via the Čech complex associated to some generators $(f_1, \dots f_r)$ of I. This Čech complex consist of finite direct sums of R_f's (f = product of some f_i's) with maps localization maps. Thus it is a complex of finitely generated unit $R[F]$–modules. Since the category is abelian (closed under taking kernels, images and quotients) it follows that $H^i_I(R)$ is a finitely generated unit $R[F]$–module.

Crucial in the following construction of $L(A, R)$ (note the obvious affine notation of the above) will the concept of a *generator* of a unit $R[F]$–module. It is a fairly simple idea saying that, given a map $\beta : M \longrightarrow F^*M$ (the generator) there is a unit $R[F]$–module it generates. This is constructed as follows. Arrange the Frobenius powers of the map β into a direct limit system

$$M \xrightarrow{\beta} F^*M \xrightarrow{F^*\beta} F^{2*}M \xrightarrow{F^{2*}\beta} F^{3*}M \cdots$$

and define $\mathscr{M}$ to be the limit of this system. Note that, since F^* commutes with direct limits, $F^*\mathscr{M}$ is naturally isomorphic to $\mathscr{M}$ itself (essentially the *same* limit system defines both, $\mathscr{M}$ and $F^*\mathscr{M}$), thus carries the structure of a unit $R[F]$–module. As an example consider the map $\beta : R \xrightarrow{\cdot f} R = F^*R$ given by multiplication by $f \in R$ and check that the $R[F]$–module generated by this map is R_f.

3. Construction of $L(A,R)$ in positive characteristic

The construction of $L(A,R) \subseteq H^c_I(R)$ is by finding its generator as a unit $R[F]$–module as just described. For this we first describe a generator for $H^c_I(R)$ as follows. Assume that (R,m) is complete. This module carries a natural $R[F]$–module structure, that is a map

$$R^1 \otimes_R H^d_m(R/I) \longrightarrow H^d_m(R/I)$$

which is induced by the projection $R/I^{[p^e]} \longrightarrow R/I$ under the identification of $R^e \otimes_R H^d_m(R/I)$ with $H^d_m(R/I^{[p^e]})$. To this map apply the Matlis duality functor $(\_\_)^\vee = \operatorname{Hom}(\_\_, E_{R/m})$ where $E_{R/m}$ is an injective hull of the residue field of R. One obtains a map

$$\beta : H^d_m(R/I)^\vee \longrightarrow (R^1 \otimes_R H^d_m(R/I))^\vee = R^1 \otimes_R H^d_m(R/I)^\vee$$

which one can use to *generate* a unit $R[F]$–module. Note that by local duality $H^d_m(R/I)^\vee = \operatorname{Ext}^c(R/I,R)$ the sequence defining this unit $R[F]$–module is

$$\operatorname{Ext}^c(R/I,R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^c(R/I^{[p]},R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^c(R/I^{[p^2]},R) \longrightarrow \dots$$

where the maps are just the ones induced by $R/I \longrightarrow R/I^{[p]}$ (the square brackets denote Frobenius powers of the ideal, that is the ideal generated by the pth powers of the elements of I). But one standard way to define $H^c_I(R)$ is as the limit $\varinjlim \operatorname{Ext}^c(R/I^n,R)$. Since the Frobenius powers $I^{[p^e]}$ of I are cofinal within the powers I^n of I it follows that the above limit is just $H^c_I(R)$. Summarizing we have

$$H^d_m(A) \xrightarrow{(\_\_)^\vee} \operatorname{Ext}^c(R/I,R) \xrightarrow{F\text{-generates}} H^c_I(R)$$

and this two step process is denoted by $(\_\_)^{\vee_F}$. In order to construct $L(A,R)$ now, we use the existing knowledge about $H^d_m(A)$. In particular we use the following result of Smith [**Smi97**].

Theorem 3. *$H^d_m(A)$ contains a unique maximal proper $R[F]$–submodule, denoted by 0^* and called the* tight closure of zero. *Furthermore, $A = R/I$ is F–rational if and only if $0^* = 0$.*

F-rationality is the finite characteristic analog of having rational singularities. The submodule 0^* can be explicitly described as consisting of all $\eta \in H^d_m(A)$ such that there is $c \in R$ (nonzero) with $cF^e(\eta) = 0$ for all $e \gg 0$.

Now it is clear how to proceed. Since 0^* is maximal, the quotient $H^d_m(A)/0^*$ is simple as an $R[F]$–module. Applying Matlis duality followed by turning to the generated unit $R[F]$–module we get the following picture.

$$\begin{tikzcd} H^d_m(A) \arrow[r, rightsquigarrow, "(\_)^{\vee_F}"] \arrow[dd, twoheadrightarrow] & H^c_I(R) \\ & \cup \\ H^d_m(A)/0^* \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathscr{L}(A,R) \end{tikzcd}$$

To justify this, a careful investigation of the functor $(\_)^{\vee_F}$ has to be undertaken. In the course of which it turns out that it is an exact functor from $R[F]$–modules to unit $R[F]$–modules, which sends a simple cofinite $R[F]$–module (such as $H^d_m(A)/0^*$) to a simple finitely generated unit $R[F]$–module (such as $L(A,R)$). In summary one obtains the following result

Theorem 4. *The unique simple unit $R[F]$–submodule of $H^c_I(R)$ is given as*

$$L(A,R) = (H^d_m(A)/0^*)^{\vee_F}.$$

Consequently, if A is F–rational, then $H^c_I(R)$ is simple (as a unit $R[F]$ and *as a D_R–module). Furthermore, $H^c_i(R)$ is simple if and only if 0^* is annihilated by some power of the Frobenius.*

In the outline above I treated the case that R is complete. The general case can be obtained from this be a reduction argument – which is not entirely straightforward due to the fact that the completion of a domain might not be a domain. These technical difficulties though are manageable.

4. Application to dimension 1

Using the above result one obtains a complete characterization of the simplicity of $H^c_I(R)$ in the case that R/I is one dimensional. This is a finite characteristic analog of results of S.P. Smith [**Smi88**] and Yekutieli [**Yek98**].

Corollary 5. *Let $A = R/I$ be a one–dimensional local domain with R regular and F–finite. Then $H^c_I(R)$ is D_R–simple (equiv. unit $R[F^e]$–simple) if and only if A is unibranch.*

Phrased less fancily, $H^c_I(R)$ is simple if R/I has only cusp singularities, and $H^c_I(R)$ is not simple if R/I has a node.

This last result that for curves $\mathscr{L}(A,R)$ is described in the same way in positive characteristic as it is in characteristic zero is somewhat misleading. In higher dimensions one expects that $\mathscr{L}(A,R)$ behaves significantly different depending on the characteristic.

For example, consider the ideal $I = (xy - zw) \subseteq R = k[x,y,z,w]$. Then $A = R/I$ is the coordinate ring of the cone over $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ with the only singular point being the vertex. The localization of A at the vertex is F–rational. Therefore, our results above show that $H^1_I(R)$ is simple as a D_R–module in finite characteristic. Nevertheless, in characteristic zero the module $H^1_I(R)$ is not D_R–simple since the Bernstein-Sato polynomial of $xy - zw$ is $(s-1)(s-2)$ and therefore has an integral zero of less than -1. This shows that the D_R–submodule generated by $(xy - zw)^{-1} \in H^1_I(R)$ does not contain $(xy - zw)^{-2}$. Therefore $H^c_I(R)$ has a proper D_R–submodule and is therefore not D_R–simple.

5. Emerton-Kisin Correspondence

Finally let me point out that the replacement of the $\mathscr{D}_X$–module structure by a unit $\mathscr{O}_X[F]$–structure in the study of $\mathscr{L}(Y,X)$ enables one to place $\mathscr{L}(Y,X)$, in finite characteristic, in the context of a Riemann–Hilbert type correspondence. That such a correspondence exists is recent work of Emerton and Kisin [**EK99, EK00**], where an equivalence (on the level of derived categories) of the category of finitely generated unit $\mathscr{O}_X[F]$–modules and the category of constructible $\mathbb{F}_p$–sheaves (on the étale site) is developed. Within this correspondence, the simple unit $\mathscr{O}_X[F]$–module $\mathscr{L}(Y,X)$ constructed here does indeed correspond to certain middle extensions on the constructible $\mathbb{F}_p$–site.

For zero characteristic, the Riemann–Hilbert correspondence relates holonomic $\mathscr{D}_X$–modules to constructible sheaves of $\mathbb{C}$–vectorspaces by means of a vast generalization of de Rham theory, *i.e.* to an ultimatively topological theory with cohomology living in degrees $0,\dots,2d$, with d the dimension.

In positive characteristic, the Emerton-Kisin correspondence relates finitely generated unit $\mathscr{O}_X[F]$–modules to constructible $\mathbb{F}^{p^e}$–sheaves on $X_{\text{ét}}$, vastly generalizing Artin-Schreyer theory, which ultimately is a coherent theory, and the corresponding cohomology sheaves live in dimensions up to $d+1$ (via the Artin-Schreier sequence).

Thus, returning to the example of curves above, this gives some hint why we have agreement between characteristic zero and positive characteristic only in dimension one. Because dimensions d=1 is the only case where $2d = d + 1$.

References

[BK81] J.-L. Brylinski & M. Kashiwara – Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. Math.* **64** (1981), no. 3, 387–410.

[Bli03] M. Blickle – The D-module structure of $R[F]$-modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 4, 1647–1668 (electronic).

[EK99] M. Emerton & M. Kisin – Riemann–Hilbert correspondence for unit $\mathscr{F}$-crystals. I, 1999, to appear.

[EK00] ———, Riemann–Hilbert correspondence for unit $\mathscr{F}$-crystals. II, 2000, in preperation.

[Lyu97] G. Lyubeznik – F-modules: applications to local cohomology and D-modules in characteristic $p > 0$, *J. Reine Angew. Math.* **491** (1997), 65–130.

[Smi88] S. P. Smith – The simple $\mathscr{D}$-module associated to the intersection homology complex for a class of plane curves, *J. Pure Appl. Algebra* **50** (1988), no. 3, 287–294.

[Smi97] K. E. Smith – F-rational rings have rational singularities, *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 1, 159–180.

[Vil85] K. Vilonen – Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities, *Invent. Math.* **81** (1985), no. 1, 107–114.

[Yek98] A. Yekutieli – Residues and differential operators on schemes, *Duke Math. J.* **95** (1998), no. 2, 305–341.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 99–104
Universität Göttingen, 2003-04

ALGEBRAIC CYCLES FOR MULTIPLE POLYLOGARITHMS

H. Gangl

Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, D-53111 Bonn, Germany
E-mail : herbert@mpim-bonn.mpg.de

Abstract. This is a short report on joint work with A.B. Goncharov and A. Levin, in which we give a map of differential graded algebras from multiple polylogarithms to algebraic cycles, using a certain kind of trees.

1. Background

Bloch and Kříž ([**BK94**], [**Blo97**]) gave a beautiful candidate for the category of mixed Tate motives over a field F in terms of algebraic cycles. More precisely, they first promoted the differential graded algebra structure on Bloch's original cycle complex [**Blo86**] to a Hopf algebra via the bar construction and then took the indecomposables in its zeroth cohomology. The resulting object has the structure of a coLie algebra and its corepresentations should incarnate the mixed Tate motives over F.

November 27th, 2003.

In order to give evidence that this construction yields a good candidate for a category as above, they were of course obliged to show many of the expected properties that one demands. As basic properties, one needs realization functors into the category of mixed Hodge structures and the one of étale representations. Both requirements have already been met in Bloch and Kříž's seminal work, and furthermore they showed that one can exhibit in their category a class of "mandatory" objects, which behave exactly as are required from polylogarithm motives.

Now although the polylogarithm motives are already expected to "detect" a lot of structure (like the "motivic cohomology") in this envisaged category, they do not give the complete motivic picture. It is conceptually much more satisfactory—and presumably gives a picture which is much closer to being complete—to take the point of view of Beilinson and Goncharov (in which they postulate a "motivic Lie algebra over a field") and to consider motives attached to *multiple* polylogarithms (see [**Gon**] for a wealth of information on them), where the latter can be defined via an iterated integral. These integrals form definitely a larger class of objects than the classical polylogarithms: while it is known that all iterated integrals (of a certain type) are expressible by multiple polylogarithms, the corresponding statement for the usual polylogarithms is—as is well-known—already wrong in degree 4.

2. Results

In my talk, I outlined a rather simple combinatorial recipe, using rooted trees with decorations, by which one can construct algebraic cycles in the Bloch-Kriz category corresponding to multiple polylogarithms. In fact, one can define a differential graded algebra (DGA) on those trees and one obtains a map of DGA's from (polynomials in) trees to algebraic cycles. This map can actually be lifted to a map of the corresponding "bar constructed" Hopf algebras. We remark that these trees are closely related to work of Goncharov; on the one hand they are very reminiscent of the (non-rooted) trees used in [**Gon99**], and on the other hand they are related to his dihedral Lie algebra [**Gon01**].

The actual connection to multiple polylogarithms arises from associating an integral to the associated algebraic cycle, which turns out to be precisely the defining integral of multiple polylogarithms. This integral comes about when we modify (and cut short) the method used by Bloch and Kříž for the Hodge realization of their algebraic cycles.

3. Example: the double logarithm

We illustrate the above statements on the simplest example, the so-called double logarithm. Let $F \subset \mathbb{C}$ be a field. Totaro gave a parametrized algebraic cycle corresponding to the dilogarithm $Li_2(a)$, $a \in F$, by the image of the map

$$\begin{aligned} \varphi_a : \quad \mathbb{P}^1_F &\longrightarrow (\mathbb{P}^1_F \setminus \{1\})^3 \,, \\ t &\mapsto \Big(t, 1-t, 1-\tfrac{a}{t}\Big) \,, \end{aligned}$$

whose boundary in the associated cycle complex consists of the single term

$$(a, 1-a) \in (\mathbb{P}^1_F \setminus \{1\})^2 \,.$$

This term is reminiscent of the differential for $d\,Li_2(a) = Li_1(a)\ d\,Li_1(a)$. We denote the image of φ_a by $[t, 1-t, 1-a/t]$. In a similar way, we consider the parametrized cycle (with parameter t)

$$C_{a,b} := \Big[1-t, 1-\frac{ab}{t}, 1-\frac{b}{t}\Big] \,,$$

whose boundary consists of three terms (each one gives a point in $(\mathbb{P}^1_F \setminus \{1\})^2$)

$$\big[1-ab, 1-b\big] - \Big[1-ab, 1-\frac{1}{a}\Big] + \big[1-b, 1-a\big] \,. \tag{1}$$

We claim that it corresponds to the *double logarithm*

$$Li_{1,1}(a,b) = \sum_{0<m<n} \frac{a^m}{m}\frac{b^n}{n} \qquad (|a|, |b| < 1,\ a, b \in \mathbb{C}),$$

and the boundary terms in (1) are reminiscent of the differential of $Li_{1,1}(a,b)$ which is given by

$$d\,Li_{1,1}(a,b) = Li_1(b)\,d\,Li_1(a) - Li_1(ab)\,d\,Li_1(\frac{1}{a}) + Li_1(ab)\,d\,Li_1(b) \,.$$

This formula provides first evidence that $C_{a,b}$ should play the role of the double logarithm.

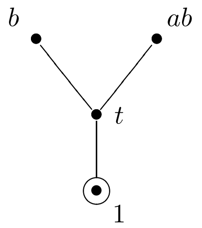
The well-known identity relating the double logarithm and the dilogarithm

$$Li_{1,1}(x,y) = Li_2\Big(\frac{1-x}{1-y^{-1}}\Big) - Li_2\Big(\frac{1}{1-y^{-1}}\Big) - Li_2(xy) \,,$$

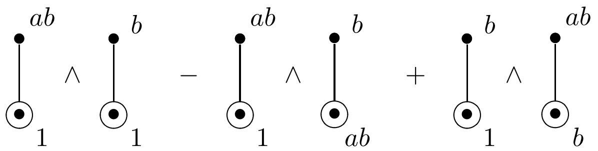
found by Goncharov and Zagier, holds for the corresponding algebraic cycles $C_{x,y}$, $C_{(1-x)/(1-y^{-1})}$ etc. above (at least "up to lower order terms" and "modulo boundaries"). This adds even more evidence that $C_{a,b}$ should be considered as a cycle representing the double logarithm.

The structural similarity of the differential of $Li_{1,1}(a,b)$ and of $C_{a,b}$ suggest a common combinatorial structure which can be exhibited on plane trivalent trees: a coordinate $1-\frac{x}{y}$ of $C_{a,b}$, say, is encoded by a directed edge with vertices decorated by x and y, with $x, y \in \{1, t, ab, b\}$, at the source and end, respectively. The tree $\tau(a,b)$ corresponding to $C_{a,b}$ can be drawn as follows (we think of the edge ordering as given in counterclockwise direction starting from the root edge, where the root vertex is encircled):

$\tau(a,b) =$



We call such trees, i.e., planted plane trees with a map from its external vertices into a set R, for short *R-deco trees*. We have defined in [**GGLb**] a differential on the free graded-commutative algebra generated by R-deco trees. The differential for such a tree consists of a sum, over all edges of the tree, of contractions of the tree along an edge, with the correct sign. The result of a contraction need not be a tree: if the edge is external, then we get a monomial in such trees, where certain structures are inherited. As an example, we obtain for the differential of $\tau(a,b)$, where $R = F^\times$—using the wedge notation to indicate anticommutativity—the expression



whose terms correspond precisely to the three terms in (1).

One of our main results is the following:

Theorem 1. *Let F be a field. There is a map of differential graded algebras from the algebra generated by generic $F^\times$-deco trees to the one on algebraic cycles over F.*

Here a tree is called *generic* if all the decorations of its external edges are mutually different.

Connecting the algebraic cycle $C_{a,b}$ to an iterated integral. The real reason why we can think of the above cycle $C_{a,b}$ as the cycle version of the double logarithm is through its associated period integral. There is an enlarged differential graded algebra based on cycles with both algebraic and real parameters, in which we can write $C_{a,b}$ as a boundary of another cycle $\beta_{a,b}$, say. (More precisely, this is only true modulo decomposable cycles, and one needs to apply the bar construction in which the associated "bar version" of $C_{a,b}$ can be bounded "on the nose", i.e., where we are not working modulo decomposable cycles.) If we integrate $\beta_{a,b}$ against the standard volume form for its ambient space, most of the terms give zero while the only term with purely real parameters gives the iterated integral

$$\int_{0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1} \frac{dx_1}{x_1-(ab)^{-1}} \wedge \frac{dx_2}{x_2-b^{-1}}\,,$$

which is nothing else than the integral expression for $Li_{1,1}(a,b)$.

Higher cases. A similar description as a formal sum of trivalent trees with a fixed decoration at the external vertices can be given for the multiple logarithm $Li_{1,\ldots,1}(a_1,\ldots,a_m)$ in general. If one wants to extend it further to multiple *poly*logarithms (i.e., where the indices in Li_* are natural numbers), then it is appropriate to introduce trees with two types of edges.

For a gentle introduction to the material, I refer to our note [**GGLa**], while the "real" version is in [**GGLb**]. Note that the trees given here are slightly different from the ones in these papers: for comparison with the iterated integrals there it is more convenient to draw trees upside down with inverted decorations.

References

[BK94] S. Bloch & I. Kříž – Mixed Tate motives, *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), no. 3, 557–605.

[Blo86] S. Bloch – Algebraic cycles and higher K-theory, *Adv. in Math.* **61** (1986), no. 3, 267–304.

[Blo97] ———, Lectures on mixed motives, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 329–359.

[GGLa] H. Gangl, A. B. Goncharov & A. Levin – Multiple logarithms, algebraic cycles and trees, in preparation.

[GGLb] ———, Multiple logarithms, rooted trees and algebraic cycles, in preparation.

[Gon] A. B. Goncharov – Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, arXiv:math.AG/0103059.

[Gon99] ———, Galois groups, geometry of modular varieties and graphs, 1999, Talk at the Arbeitstagung Bonn, http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html.

[Gon01] ———, The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, *Duke Math. J.* **110** (2001), no. 3, 397–487.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 105–111
Universität Göttingen, 2003-04

BOUNDARIES OF LUBIN-TATE DEFORMATION SPACES

M. Strauch
Mathematisches Institut, Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany
E-mail : straucm@math.uni-muenster.de

Abstract. The deformation space of a formal one-dimensional group of height n possesses an infinite tower of generically étale coverings which are defined by the torsion points of the universal deformation. By the work of Harris and Taylor, one knows that the inductive limit of the corresponding l-adic cohomology groups realizes Langlands and Jacquet-Langlands correspondences in the middle degree. We study natural quasi-compact adic spaces in which these étale coverings are densely contained, and which serve to understand the cohomology groups outside the middle degree.

1. Introduction: General program and main problems

The general program is to prove that the l-adic étale cohomology of certain deformation spaces of p-divisible groups (in the sense of Rapoport and Zink, cf. [**RZ96**]), equipped with a level structure, realizes Langlands correspondences. Such a tower of deformation spaces (indexed by the level structure) is equipped with an action of two p-adic groups G and J, and on the cohomology there is also an action of the Weil group W_F of the local non-archimedean base field F.

December 1st, 2003.

The expected Langlands correspondences between the representations of these three groups, realized on the cohomology, may be expressed informally by the following type of identity

$$\varinjlim_{K} \; H_c^*(M_K \otimes \bar{F}^\wedge, \overline{\mathbb{Q}_l})_{cusp} \;\text{"}=\text{"}\; \bigoplus \pi \otimes \rho \otimes \sigma \, ,$$

where π (resp. ρ, resp. σ) is a representation of G (resp. J, resp. W_F) *and* such a tensor product occurs if and only if the representations are related by Langlands correspondences: $\rho = \mathscr{L}(\pi)$, $\sigma = \mathscr{L}(\pi)$. The limit is taken over compact-open subgroups $K \subset G$, and M_K is the space parametrizing deformations with a level structure of type K.

In the following we want to focus on one special case, namely the deformation spaces of one-dimensional formal $\mathfrak{o}$-modules of finite height n, where $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ is the ring of integers in F.

For $n = 1$ the constructions and assertions are a reformulation of Lubin-Tate theory, i.e. explicit local class field theory.

The first case really involving geometry is when n is equal to two. And then the example which is best known is the case where $F = \mathbb{Q}_p$, which is equivalent to study deformations of a supersingular elliptic curve in characteristic p. For an integer $N > 3$ which is prime to p consider the modular curve $X(Np^m)$ parametrizing elliptic curves, equipped with a Drinfeld basis for the group of Np^m-torsion points. There is a specialisation map:

$$sp : X(Np^m)^{rig}_{\mathbb{Q}_p} \to X(Np^m)_{\mathbb{F}_p}$$

from the associated rigid space to the special fibre, and the space $M_m = M_{K_m}$ is the *tubular neighbourhood* of a supersingular point on the special fibre:

$$M_m = sp^{-1}(\text{supersingular point}) \, .$$

Coming back to the general program, we want to point out that we solely deal with the correspondence between representations of the p-adic groups G and J.

Question: What methods do we intend to use to prove that the cohomology realizes the correspondence between representations of G and J?

Answer: Trace formulas of Lefschetz-Verdier type and fixed point formulas.

The Lefschetz trace formula should express the trace of an endomorphism on the cohomology in terms of fixed points. What makes the situation difficult in our case is that the spaces M_K are in general *not compact* (in any suitable sense), and that therefore one has to take into account the appearance of a *boundary term*. Rather easy considerations show that such a boundary term will indeed appear. So we have to treat the following problems:

• To define the *boundary term* intrinsically and to show that this distribution is orthogonal to the cuspidal spectrum.
• To compute the number of fixed points for sufficiently many endomorphisms and to show that this implies indeed that the correspondence is realized on the cohomology.

The approach to this problem via a Lefschetz trace formula was carried out in a different case by Faltings, cf. [**Fal94**]. However, for the coverings of the Drinfeld symmetric spaces considered by Faltings, it turned out that one can restrict to endomorphisms which do not have fixed points at infinity. This simplified the treatment of that case considerably. In the case studied here the boundary term is in general not zero, and it is this aspect which presents a novelty.

2. The spaces M_m

Let $\mathbb{X}$ be a one-dimensional formal group over $\bar{\mathbb{F}}_q$ that is equipped with an action of $\mathfrak{o}$, i.e. we assume given a homomorphism $\mathfrak{o} \to End_{\bar{\mathbb{F}}}(\mathbb{X})$ such that the action of $\mathfrak{o}$ on the tangent space is given by the reduction map $\mathfrak{o} \to \mathbb{F}_q \subset \bar{\mathbb{F}}$. Such an object is called a *formal* $\mathfrak{o}$*-module* over $\mathbb{F}$. Moreover, we assume that $\mathbb{X}$ is of F-height n, meaning that the kernel of multiplication by ϖ is a finite group scheme of rank q^n over $\mathbb{F}$.

It is known that for each $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ there exists a formal $\mathfrak{o}$-module of F-height n over $\mathbb{F}$, and that it is unique up to isomorphism [**Dri74**], Prop. 1.6, 1.7.

Let $\mathscr{C}$ be the category of complete local noetherian $\hat{\mathfrak{o}}^{nr}$-algebras with residue field $\mathbb{F}$. For $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $h \in \mathbb{Z}$ we consider the functor $\mathscr{M}_m^{(h)}$ of deformations of $\mathbb{X}$ to algebras in $\mathscr{C}$, which are equipped with a quasi-isogeny of height h on the special fibre, and with a Drinfeld level-m-structure. By Drinfeld, [**Dri74**]

Prop. 4.3, this functor is representable by a regular local ring $R_m^{(h)}$, which is a finite flat algebra over $\hat{\mathfrak{o}}^{nr}[[u_1, \ldots, u_{n-1}]]$ which itself represents $\mathscr{M}_0^{(h)}$. We put

$$M_m^{(h)} = \mathrm{Spa}(R_m^{(h)}, R_m^{(h)}) - V(\varpi)$$

and

$$M_m = \coprod_h M_m^{(h)}\,.$$

These *adic spaces* were introduced and studied by R. Huber, who also defined étale cohomology for such spaces, cf. [**Hub96**].

The group of quasi-isogenies of $\mathbb{X}$ is equal to the group $B^\times$ of units of a central division algebra over F with invariant $\frac{1}{n}$. There is an action of $GL_n(\mathfrak{o}) \times B^\times$ on the spaces M_m and this action extends to an action of the group $GL_n(F) \times B^\times$ on the cohomology groups

$$H_c^* = \varinjlim_m \; H_c^*(M_m \otimes \bar{F}^\wedge, \overline{\mathbb{Q}_l})\,.$$

3. The Jacquet-Langlands correspondence

Let π be a supercuspidal representation of $G = GL_n(F)$. It is known that π is induced from a (finite-dimensional) irreducible representation λ of some open subgroup $K_\pi \subset G$ that contains and is compact modulo the centre of G. Hence we may write

$$\pi = c\text{-}Ind_{K_\pi}^G(\lambda)\,.$$

The character of π is a locally constant function on the set of elliptic regular elements in G (i.e. those whose characteristic polynomial is separable and irreducible), and for such an element $g \in G$ we have

$$\chi_\pi(g) = \sum_{\substack{g' \in G/K_\pi \\ (g')^{-1}gg' \in K_\pi}} \chi_\lambda((g')^{-1}gg')\,.$$

For π as above, the representation $\rho = \mathscr{J}\mathscr{L}(\pi)$ is characterized by the following identity. Let $g \in G$ and $b \in B^\times$ be regular elliptic elements with the same characteristic polynomial. Then the following character relation holds

$$\chi_\rho(b) = (-1)^{n-1} \cdot \chi_\pi(g)\,.$$

In the following we assume for simplicity that $K_\pi = \varpi^{\mathbb{Z}} GL_n(\mathfrak{o})$, that $\lambda(\varpi) = \mathrm{id}$, and that the restriction of λ to $K_m = 1 + \varpi^m M_n(\mathfrak{o})$ is trivial.

We put $V(\pi) = \mathrm{Hom}_G(H_c^*, \pi)$ and $\Gamma = GL_n(\mathfrak{o}/\varpi^m)$. We fix a regular elliptic element $b \in B^\times$. Then it is easy to see that

$$tr(b \,|\, V(\pi)) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} tr((\gamma, b^{-1}) \,|\, H_c^*(M_m/\varpi^{\mathbb{Z}})) \cdot \chi_\lambda(\gamma^{-1}) \,.$$

***Theorem 1* (Trace formula).**

$$tr((\gamma, b^{-1}) \,|\, H_c^*(M_m/\varpi^{\mathbb{Z}})) = \#Fix((\gamma, b^{-1}) \,|\, M_m/\varpi^{\mathbb{Z}}) + \beta_m(\gamma, b^{-1}) \,,$$

where $\beta_m(\gamma, b^{-1})$ has the property that

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \beta_m(\gamma, b^{-1}) \cdot \chi_\lambda(\gamma^{-1}) = 0 \,.$$

***Theorem 2* (Fixed point formula).** *Let g_b be in the conjugacy class corresponding to b. Then*

$$Fix((\gamma, b^{-1}) \,|\, M_m/\varpi^{\mathbb{Z}}) = n \cdot \#\{g \in G/\varpi^{\mathbb{Z}} K_m \,|\, g^{-1} g_b g = \gamma^{-1}\} \,.$$

***Theorem 3* (Jacquet-Langlands correspondence)**

$$V(\pi) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \mathscr{J}\mathscr{L}(\pi) \,.$$

This follows easily from the previous theorems and is explained in detail in [**Strb**]. As already pointed out above, the main problem in proving a trace formula is the fact that the spaces $M_m^{(h)}$ are not compact. We will sketch below how to compactify them, thereby making transparent the nature of the boundary term.

4. Compactifications and boundaries

From now on we drop the upper index of the spaces $M_m^{(h)}$ and denote by M_m the space that was previously denoted by $M_m^{(0)}$. The same convention applies to the corresponding formal schemes.

Denote by X^{univ} the universal formal $\mathfrak{o}$-module over $\mathscr{M}_0$, and for any $m \geq 1$ let

$$\varphi_m^{univ} : (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n \to X^{univ}[\varpi^m]$$

be the universal level-m-structure on $\mathscr{M}_m$.

For any $m \geq 0$ we consider the adic spaces

$$\overline{M_m} = d(\mathscr{M}_m) = \mathrm{Spa}(R_m, R_m) - V(\mathfrak{m}_{R_m}) .$$

Next we are going to stratify the spaces $\overline{M_m}$ so that M_m is the unique open stratum.

Note that X^{univ} induces a ϖ-divisible $\mathfrak{o}$-module on $\overline{M_0}$ which we denote by $X^{univ}[\varpi^\infty]$. For $h = 0, \ldots, n-1$ let $\partial_h M_0$ be the subset of points $x \in \overline{M_m}$ such that the connected part of $(X^{univ} \otimes \kappa(x))[\varpi^\infty]$ has F-height h. One has $M_0 = \partial_0 M_0$. For a direct summand $A \subsetneq (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n$ let $\partial_A M_m$ be the subset of points $x \in \overline{M_m}$ such that

$$\ker(\varphi_m^{univ} : (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n \to (X^{univ} \otimes \kappa(x))[\varpi^m]) = A .$$

The following theorem summarizes the properties of these compactifications. For more details and cohomological consequences see [**Stra**].

Theorem 4.

i) One can choose a regular system of parameters $\varpi = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ for the local complete ring R_0 which represents the functor $\mathscr{M}_0$, so that the multiplication by ϖ on the universal formal $\mathfrak{o}$-module is given by a power series (in a variable T) of the form

$$\varpi T + u_1 T^q + u_2 T^{q^2} + \ldots + u_{n-1} T^{q^{n-1}} + T^{q^n} + \ldots .$$

ii) For any $h = 0, \ldots, n-1$ the space $\partial_h M_0$ carries the structure of an analytic adic space isomorphic to

$$\mathrm{Spa}(R_0/(u_0, \ldots, u_{h-1}), R_0/(u_0, \ldots, u_{h-1})) - V(u_h) .$$

iii) Let $m \geq 1$ and denote by R_m the ring representing the functor $\mathscr{M}_m$. Let

$$\varphi_m^{univ} : (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n \to \mathfrak{m}_{R_m}$$

be the universal level-m-structure. Denote by $e_1, \ldots, e_n$ the canonical basis of $\mathfrak{o}^n$. Then the elements

$$\varphi_m^{univ}(\varpi^{-m} e_1), \ldots, \varphi_m^{univ}(\varpi^{-m} e_n)$$

form a regular system of parameters of R_m.

iv) For any $m \geq 1$ *and any direct summand* $A \subsetneq (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n$ *of rank* h *(over* $\mathfrak{o}/(\varpi^m)$*) the space* $\partial_A M_m$ *carries the structure of an analytic adic space isomorphic to*

$$\mathrm{Spa}(R_m/\mathfrak{a}_A, R_m/\mathfrak{a}_A) - \cup_{A' \supsetneq A} V(\mathfrak{a}_{A'}) \,,$$

where $A' \subset (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n$ *runs through all direct summands of* $(\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n$ *strictly containing* A*, and* $\mathfrak{a}_A$ *is the ideal of* R_m *generated by all* $\varphi_m^{univ}(a)$ *for* $a \in A$ *(dito for* A'*).*

v) The closure of $\partial_A M_m$ *is the set of all points* $x \in \overline{M_m}$ *such that*

$$\ker(\varphi_m^{univ} : (\varpi^{-m}\mathfrak{o}/\mathfrak{o})^n \to (X^{univ} \otimes \kappa(x))[\varpi^m])$$

contains A*. One has*

$$\overline{\partial_A M_m} \simeq \mathrm{Spa}(R_m/\mathfrak{a}_A, R_m/\mathfrak{a}_A)_a \,.$$

References

[Dri74] V. G. Drinfel′d – Elliptic modules, *Mat. Sb. (N.S.)* **94(136)** (1974), 594–627, 656.

[Fal94] G. Faltings – The trace formula and Drinfel′d's upper halfplane, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 2, 467–481.

[Hub96] R. Huber – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[RZ96] M. Rapoport & T. Zink – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Stra] M. Strauch – Boundaries of Lubin-Tate deformation spaces, in preparation.

[Strb] ______, On the Jacquet-Langlands correspondence on the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower, to appear in *Astérisque*.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 113–116
Universität Göttingen, 2003-04

INTRODUCTION TO MOTIVIC HODGE THEORY I

M. Spitzweck
Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5, 37073 Göttingen, Germany
E-mail : spitz@uni-math.gwdg.de

Abstract. These are notes from my first talk on Motivic Hodge theory, outlining the construction of limit mixed Hodge structures and their motivic analog.

1. Introduction

Motivic Hodge theory is concerned with the transportation of principles and constructions from Hodge theory to the motivic world. In this note we will outline a rather special construction from Hodge theory, so called limit Hodge structures, and then sketch the motivic environment to which an analog of this construction can be carried over.

In the first part we will explain the pure Hodge structure on H^1 of a smooth projective curve over a field of characteristic 0.

Then we will look at variations of those arising from a standard family of elliptic curves. We examine what happens with the Hodge structure when the

December 3rd, 2003.

moduli parameter goes to infinity. We describe the canonical extension of the underlying bundle over infinity and the possible limit mixed Hodge structures on the fiber over infinity. This will be a sketchy description of Schmid's construction [**Sch73**] of the limit mixed Hodge structure using parameter spaces of Hodge structures. We will not explain the more algebraic construction using mixed Hodge complexes which was first done by Steenbrink [**Ste76**].

Finally we describe the functorial situation in which the analogue of limit Hodge structures, namely limit motives, will be defined.

2. Hodge structures

2.1. Definitions. Let $k \subset \mathbb{C}$ be a field.

Let $n \in \mathbb{Z}$. A *(pure) $\mathbb{Q}$-Hodge structure V of weight n defined over k* consists of a $\mathbb{Q}$-vector space V_B, a k-vector space V_{dR}, a decreasing Hodge filtration $F^\bullet$ on V_{dR} and a comparison isomorphism $V_B \otimes \mathbb{C} \cong V_{\mathrm{dR}} \otimes_k \mathbb{C}$, such that the induced filtration on $V_B \otimes \mathbb{C}$ satisfies $F^p V_{B,\mathbb{C}} \oplus \overline{F^q V_{B,\mathbb{C}}} = V_{B,\mathbb{C}}$ for $p + q = n+1$, where the bar denotes complex conjugation on a complexified $\mathbb{Q}$-vector space.

A *mixed $\mathbb{Q}$-Hodge structure V defined over k* consists of a $\mathbb{Q}$-vector space V_B, a k-vector space V_{dR}, an increasing weight filtration $W^\bullet$ on V_B and V_{dR}, a decreasing Hodge filtration $F^\bullet$ on V_{dR} and a comparison isomorphism $V_B \otimes \mathbb{C} \cong V_{\mathrm{dR}} \otimes_k \mathbb{C}$ compatible with the weight filtrations, such that for any n the induced Hodge filtration on $W^n V / W^{n-1} V$ defines a pure $\mathbb{Q}$-Hodge structure of weight n.

2.2. Examples. Let k be as above and C/k a smooth projective geometrically irreducible curve. Then the Hodge structure of weight 1 on $H^1(C(\mathbb{C})^{\mathrm{top}}, \mathbb{C})$ consists of $V_B = H^1(C(\mathbb{C})^{\mathrm{top}}, \mathbb{Q})$, $V_{\mathrm{dR}} = \mathbb{H}^1_{\mathrm{Zar}}(C, \Omega^\bullet_{C/k})$ and

$$F^p V_{\mathrm{dR}} = \mathrm{Im}(\mathbb{H}^1_{\mathrm{Zar}}(C, \Omega^{\geq p}_{C/k}) \to \mathbb{H}^1_{\mathrm{Zar}}(C, \Omega^\bullet_{C/k}))$$

together with the standard Betti-de Rham comparison isomorphism.

So $F^0 V_{\mathrm{dR}} = V_{\mathrm{dR}}$, $F^1 V_{\mathrm{dR}} = H^0(C, \Omega^1_{C/k})$, $F^2 V_{\mathrm{dR}} = (0)$. The map $F^1 V_{\mathrm{dR}} \to V_{B,\mathbb{C}}$ (part of the comparison isomorphism) is induced from the pairing

$$H^0(C, \Omega^1_{C/k}) \times H_1(C(\mathbb{C})^{\mathrm{top}}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

$$(\omega, \gamma) \mapsto \int_\gamma \gamma^* \omega.$$

3. Standard family of elliptic curves

Let $k = \mathbb{C}$ and $\mathscr{H}$ the upper half plane. For any $\tau \in \mathscr{H}$ there is the complex elliptic curve $\mathscr{E}_\tau$ with complex points $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$, where Λ_τ is the lattice $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. The $\mathscr{E}_\tau$ are part of an analytic family $\mathscr{E} \to \mathscr{H}$.

There are several ways to descent this family to open parts of $\mathscr{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, but we are only interested in what happens for $\tau \to i\infty$. So we look at the canonically descended family to

$$\{\Im\tau > 1\}/\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbb{Z}} \cong D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

(the last isomorphism is via the map $\tau \mapsto e^{2\pi i \tau} \cdot e^{2\pi}$).

The $\mathbb{Q}$-Hodge structure on $H^1(\mathscr{E}_\tau(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ consists of $V_{\tau,B} = H^1(\mathscr{E}_\tau(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cong \Lambda^\vee_{\tau,\mathbb{Q}}$, $V_{\tau,\mathrm{dR}} = V_{\tau,B} \otimes \mathbb{C}$, and by the last remark of Section 2 the subspace $F^1 V_{\tau,\mathrm{dR}}$ is given by the $\mathbb{C}$-valued linear form on Λ_τ which sends 1 to 1 and τ to τ (since here a canonical generator of $H^0(\mathscr{E}_\tau, \Omega^1_{\mathscr{E}_\tau/\mathbb{C}})$ is given by the descended dz). In particular for any τ this subspace is not rational.

For varying τ the $V_{\tau,B}$ form a local system $\mathscr{L}$ of $\mathbb{Q}$-vector spaces on D^* with monodromy operator $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. The $F^1 V_{\tau,\mathrm{dR}}$ do not form a subsystem of the complexified local system, but they form a holomorphic subbundle of the vector bundle $\mathscr{V} := \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}^{\mathrm{hol}}_{D^*}$ (this data plus some appropriate conditions is called a *variation of Hodge structures*).

4. The Limit mixed Hodge structure

Let the situation be as in the previous paragraph.

One knows ([**Del70**],[**Sch73**]) that there are canonical extensions $\tilde{\mathscr{V}}$ and $F^1\tilde{\mathscr{V}}$ of $\mathscr{V}$ and $F^1\mathscr{V}$ to the whole unit disc D. In our case $\mathscr{V}$ is just the vector bundle with constant fiber $\mathbb{C}^\vee \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, where we consider the first $\mathbb{C}$ as a constant 2-dimensional $\mathbb{R}$-vector space the varying lattices Λ_τ sitting inside of it, and $\tilde{\mathscr{V}}$ is the canonical constant prolongation. The subbundle $F^1\mathscr{V}$ has fibers $\langle 1^\vee + \tau \cdot \tau^\vee \rangle_{\mathbb{C}}$, where $(1^\vee, \tau^\vee)$ is the dual basis of the basis $(1, \tau)$ of the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{C}$. But $1^\vee + \tau \cdot \tau^\vee$ is the canonical element in $\mathbb{C}^\vee \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ corresponding to the identity, so $F^1\mathscr{V}$ also extends to a constant subbundle.

Now the work of Schmid, Steenbrink and others asserts that $V_0 := \tilde{\mathscr{V}}_{z=0}$ together with the filtration $F^\bullet$, a weight filtration associated to the logarithm of the monodromy operator and some choice of $\mathbb{Q}$-rational structure (which depends on a choice of a non-vanishing tangent vector at $0 \in D$) defines a mixed Hodge structure, the so called *limit mixed Hodge structure* of the given variation of Hodge structures or the family of complex varieties.

In our case the weight filtration is given by $W_{-1}V_0 = (0)$, $W_0V_0 = \langle 1\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, $W_1V_0 = \langle 1\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, $W_2V_0 = V_0$. The corresponding mixed Hodge structure is a Tate mixed Hodge structure, an extension of $\mathbb{Q}(-1)$ by $\mathbb{Q}(0)$, the extension class depending on the choice of rational structure.

In fact, a better way to look at the situation (first suggested by Deligne in [**Del80**]) is to think of the limit mixed Hodge structure as sitting as fibers inside a limit variation of mixed Hodge structures on the pointed tangent space of D at 0. In this setting we will construct a motivic analogue.

5. The motivic setting

Let C be a smooth curve over k, a field of characteristic 0, and $x_0 \in C(k)$. In later talks we will describe triangulated categories $\mathrm{DM}(X)$ of motives associated to varieties X over k possessing some good properties. The limit motive functor will then be a functor $\mathscr{L} : \mathrm{DM}(C \setminus \{x_0\}) \to \mathrm{DM}(T^{\circ}_{C,x_0})$, i.e. a functor which associates to a sheaf on the open curve a sheaf (which is in fact unipotent with respect to $\mathrm{Spec}(k)$) on the pointed tangent space at x_0. We will try to describe properties of this functor in one of the following talks.

References

[Del70] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Del80] ———, La conjecture de Weil. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, 137–252.

[Sch73] W. Schmid – Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, *Invent. Math.* **22** (1973), 211–319.

[Ste76] J. Steenbrink – Limits of Hodge structures, *Invent. Math.* **31** (1975/76), no. 3, 229–257.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 117–125
Universität Göttingen, 2003-04

KREISTEILUNG NACH MIHĂILESCU

N. Hoffmann
Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5, 37073 Göttingen, Germany
E-mail : hoffmann@uni-math.gwdg.de

Abstract. We explain the recent proof of Catalan's conjecture by Mihăilescu.

1. Über Kreisteilungskörper

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Teile von Mihăilescus Arbeiten [**Mih03a**] und [**Mih03b**] zur Catalan-Vermutung darzustellen, die sich unabhängig von der speziellen Catalanschen Gleichung als strukturelle Resultate über Kreisteilungskörper auffassen lassen.

Sei p eine feste ungerade Primzahl und

$$K := \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}), \qquad \zeta \neq 1 \text{ eine } p\text{te Einheitswurzel},$$

der maximal reelle Teilkörper des $p$ten Kreisteilungskörper. Sei

$$G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\{\pm 1\}$$

December 4th, 2003.

die Galoisgruppe von K über $\mathbb{Q}$. Gelegentlich werden wir auch den vollen Kreisteilungskörper und seine Galoisgruppe

$$\tilde{K} := \mathbb{Q}(\zeta), \qquad \tilde{G} := \mathrm{Gal}(\tilde{K}/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

benutzen. Seien

$$\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}] \qquad \text{und} \qquad E := \mathscr{O}_K^*$$

der Ring der ganzen Zahlen in K und dessen Einheitengruppen sowie

$$C := \langle \pm \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{\zeta - \zeta^{-1}} : n = 2, \dots, \frac{p-1}{2} \rangle \subseteq E$$

die Untergruppe der cyclotomischen Einheiten in K. Aus der analytischen Klassenzahlformel folgt zwar, dass die Faktorgruppe E/C und die Klassengruppe $\mathrm{Cl}(K)$ dieselbe Ordnung haben. Es ist aber nicht bekannt, ob sie als abelsche Gruppen immer isomorph sind. Als $\mathbb{Z}[G]$-Moduln sind E/C und $\mathrm{Cl}(K)$ jedenfalls nicht immer isomorph; ein Gegenbeispiel ist $p = 62501$. Details dazu finden sich in [**Was82**], §8.1.

Im Weiteren sei q eine Primzahl, die $p(p-1)$ nicht teilt. Das folgenden Resultat vergleicht die q-Sylowuntergruppen von E/C und $\mathrm{Cl}(K)$ als $\mathbb{Z}[G]$-Moduln:

***Satz 1.1* (Thaine 1988 [Tha88]).** *Angenommen, ein $\alpha \in \mathbb{Z}[G]$ annulliert $(E/C)_{q-\mathrm{Sylow}}$. Dann annulliert α auch $\mathrm{Cl}(K)_{q-\mathrm{Sylow}}$.*

Definition 1.2. $\gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ heißt *q-primär*, falls es ein $\nu \in \mathbb{Z}[\zeta]$ gibt mit $\gamma \equiv \nu^q \pmod{q^2}$. $C_q \subseteq C$ bezeichnet die Gruppe derjenigen cyclotomische Einheiten in K, die q-primär sind (als Elemente von $\mathbb{Z}[\zeta]$).

Weil q die Ordnung $(p-1)/2$ von G nicht teilt, ist die Gruppenalgebra $\mathbb{F}_q[G]$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ halbeinfach, wir haben also eine Zerlegung

$$\mathbb{F}_q[G] = \bigoplus_i \varepsilon_i \mathbb{F}_q[G] \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_i^2 = \varepsilon_i,$$

in der die Faktoren $\varepsilon_i \mathbb{F}_q[G]$ einfach (und damit Körper) sind. Eines der dabei auftretenden Idempotenten $\varepsilon_i \in \mathbb{F}_q[G]$ ist

$$\varepsilon_0 := \frac{2}{p-1} \sum_{\sigma \in G} 1 \cdot \sigma \in \mathbb{F}_q[G].$$

Diese Zerlegung läßt sich eindeutig von $\mathbb{F}_q$ zu den ganzen q-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_q$ liften; wir erhalten

$$\mathbb{Z}_q[G] = \bigoplus_i \hat{\varepsilon}_i \mathbb{Z}_q[G] \qquad \text{mit} \qquad \hat{\varepsilon}_i^2 = \hat{\varepsilon}_i.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir jetzt den Galoismodul C_q/C^q der q-primären cyclotomische Einheiten modulo $q$ten Potenzen cyclotomischer Einheiten mit den eben betrachteten Galoismoduln $(E/C)_{q-\text{Sylow}}$ und $\mathrm{Cl}(K)_{q-\text{Sylow}}$ vergleichen:

Korollar 1.3. *Wenn eines der obigen idempotenten Elemente $\varepsilon_i \in \mathbb{F}_q[G]$ den Modul C_q/C^q annulliert, dann annulliert dessen Lift $\hat{\varepsilon}_i \in \mathbb{Z}_q[G]$ sowohl $(E/C)_{q-\text{Sylow}}$ als auch $\mathrm{Cl}(K)_{q-\text{Sylow}}$.*

Beweis. Wir zeigen mit einem devissage-Argument, dass $\hat{\varepsilon}_i$ dann $(E/C)_{q-\text{Sylow}}$ annulliert; der Rest folgt mit dem Satz von Thaine.

Angenommen, $\hat{\varepsilon}_i$ annulliert $(E/C)_{q-\text{Sylow}}$ nicht. Dann gibt es ein $\eta \in E$, dessen Klasse im Bild von

$$(E/C)_{q-\text{Sylow}} \xrightarrow{\hat{\varepsilon}_i} (E/C)_{q-\text{Sylow}}$$

liegt und dort Ordnung q^n, $n \geqslant 1$, hat. Das bedeutet einerseits $\eta^{q^{n-1}} \notin C$, d. h. $\eta^{q^n} \notin C^q$, und andererseits $\eta^{q^n} \in C$, also sogar $\eta^{q^n} \in C_q$, weil η^{q^n} als $q$te Potenz auf jeden Fall q-primär ist. Mithin definiert η^{q^n} eine nichttriviale Klasse in C_q/C^q; diese liegt im Bild von ε_i, weil η im Bild von $\hat{\varepsilon}_i$ liegt. Wir haben aber angenommen, dass C_q/C^q von ε_i annulliert wird; dieser Widerspruch beweist, dass $(E/C)_{q-\text{Sylow}}$ doch von $\hat{\varepsilon}_i$ annulliert werden muss. □

2. Zur Catalan-Vermutung

Dieser Abschnitt will Mihăilescus Beweis der Catalan-Vermutung zumindest in Grundzügen wiedergeben. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt auf den Argumenten aus der algebraischen Zahlentheorie in [**Mih03b**]; die analytischen Teile werden hier nur knapp erwähnt.

Catalan vermutete 1844, dass $3^2 - 1 = 2^3$ die einzige Lösung der Gleichung

$$x^p - 1 = y^q \tag{1}$$

mit natürlichen Zahlen x, y und Primzahlen p, q ist. Schon 1850 zeigte V. A. Lebesgue [**Leb50**], dass (1) keine Lösung mit $q = 2$ hat; über hundert Jahre später bewies Ko Chao [**Ko 65**], dass $3^2 - 1 = 2^3$ die einzige Lösung von (1) mit $p = 2$ ist.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, dass (x, y, p, q) eine Lösung der Catalanschen Gleichung (1) mit zwei von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y und zwei verschiedenen ungeraden Primzahlen p, q ist. Diese Voraussetzung wird schließlich zum Widerspruch führen; damit ist dann die Catalan-Vermutung bewiesen – und alle angegebenen Zwischenresultate werden zu Aussagen über die leere Menge.

Man beachte die Symmetrie der eben gemachten Voraussetzung: Sie bleibt erhalten, wenn wir (x, y, p, q) durch $(-y, -x, q, p)$ ersetzen.

Die Strategie ähnelt den klassischen Methoden zur Untersuchung der Fermatschen Vermutung: Die linke Seite von (1) wird als Polynom faktorisiert; die Faktoren sind dann (nahezu) teilerfremd und müssen daher selbst (nahezu) $q$te Potenzen sein.

Schon als Polynom über $\mathbb{Z}$ zerfällt $x^p - 1$ in die beiden Faktoren $x - 1$ und $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$. Der euklidische Algorithmus zeigt, dass der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Zahlen nur 1 oder p sein kann; diese beiden Fälle werden – wie bei der Fermat-Vermutung – als Fall I und Fall II bezeichnet. Cassels [**Cas53, Cas60**] bewies den Fall I der Catalan-Vermutung und zeigte damit

Satz 2.1 **(Cassels 1960).** *Es gibt ganze Zahlen a und b, für die folgendes gilt:*

$$x - 1 = p^{q-1}a^q, \qquad \frac{x^p - 1}{x - 1} = pb^q \qquad \textit{und} \quad y = pab.$$

Jetzt arbeiten wir im $p$ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta)$. Als Polynom über $\mathbb{Z}[\zeta]$ zerfällt $x^p - 1$ sogar in Linearfaktoren; diese sind analog zu eben wieder (nahezu) teilerfremd. Aus Cassels Resultat folgt dann leicht

Korollar 2.2. *Das Hauptideal $(\frac{x-\zeta}{1-\zeta}) \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ ist $q$te Potenz eines Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$.*

Ein klassisches Resultat von Wieferich besagt, dass die Fermatsche Vermutung mit Exponent p nur dann falsch sein kann, wenn p^2 ein Teiler von $2^p - 2$ ist; in der Folge wurden weitere Kriterien wie $p^2 | 3^p - 3$, $p^2 | 5^p - 5$ usw. bewiesen. In der Arbeit [**Mih03a**] konnte Mihăilescu insbesondere ein ähnliches Kriterium für die Catalan-Vermutung zeigen:

Satz 2.3 **(Mihăilescu 1999).** *$q^2 | x$ und $q^2 | p^q - p$.*

Beweisskizze. Die Galoisgruppe $\tilde{G}$ des vollen $p$ten Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)$ operiert auf der Klassengruppe $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta))$. Wir nehmen an, dass $\alpha \in \mathbb{Z}[\tilde{G}]$ die ganze Klassengruppe annulliert. Wegen des vorigen Korollars gibt es dann ein $\nu \in \mathbb{Z}[\zeta]$ und eine Einheit $\eta \in \mathbb{Z}[\zeta]^*$ mit

$$\left(\frac{x - \zeta}{1 - \zeta}\right)^\alpha = \eta \cdot \nu^q.$$

Aber $\frac{x-\zeta}{1-\zeta} = \frac{-\zeta^{-1}(x-\zeta)}{-\zeta^{-1}(1-\zeta)} = \frac{1-\zeta^{-1}x}{1-\zeta^{-1}}$; indem wir dies einsetzen und dann mit dem Nenner multiplizieren, erhalten wir

$$(1-\zeta^{-1}x)^\alpha = (1-\zeta^{-1})^\alpha \eta \cdot \nu^q.$$

Von dieser Gleichung ziehen wir ihr komplex konjugiertes ab; das liefert

$$(1-\zeta^{-1}x)^\alpha - (1-\zeta x)^\alpha = (1-\zeta^{-1})^\alpha \eta(\nu^q - (\pm\zeta^? \bar{\nu})^q), \tag{2}$$

denn η und $(1-\zeta^{-1})^\alpha$ unterscheiden sich von ihren komplex konjugierten jeweils nur um einen Faktor $(\pm\zeta^?)^q$: $\bar{\eta}/\eta$ ist laut Lemma 1.6 in [**Was82**] eine Einheitswurzel und liegt in $\mathbb{Q}[\zeta]$, also ist es eine $2p$te Einheitswurzel und damit auch $q$te Potenz einer $2p$ten Einheitswurzel. Und $(1-\zeta^{-1})^\alpha$ unterscheidet sich von seinem konjugierten $(1-\zeta)^\alpha$ nur um den Faktor $(-\zeta)^\alpha$, der wiederum $q$te Potenz einer $2p$ten Einheitswurzel ist.

Jetzt betrachten wir unsere Gleichung (2) $\bmod q$. Laut Cassels gilt $p|y$, also aus Symmetriegründen auch $q|x$. Also ist die linke Seite $\bmod q$ gleich $1^\alpha - 1^\alpha = 0$. Ergo ist auch die rechte Seite durch q teilbar. Die rechte Seite ist aber – bis auf eine Einheit modulo q – Differenz zweier $q$ter Potenzen. Hier wird nun ein Trick benutzt, der noch öfter eine Rolle spielen wird:

Lemma 2.4. *Sind u^q und v^q kongruent* $\bmod q$*, dann sind u^q und v^q sogar kongruent* $\bmod q^2$.

(Für $u, v \in \mathbb{Z}$ läßt sich dieses Lemma wie folgt beweisen: Aus $u^q \equiv v^q \bmod q$ folgt mit dem kleinen Fermatschen Satz $u \equiv v \bmod q$, also $v = u + d \cdot q$. Mit der binomischen Formel ergibt sich daraus

$$v^q = u^q + \binom{q}{1} d \cdot q + \binom{q}{2} (d \cdot q)^2 + \cdots \equiv u^q \bmod q^2.$$

Dieser Argument läßt sich auf den Fall $u, v \in \mathbb{Z}[\zeta]$ verallgemeinern, siehe [**Mih03a**].)

Also ist die rechte und damit auch die linke Seite von (2) sogar durch q^2 teilbar. Durch Wahl geeigneter α (mit Hilfe des Satzes von Stickelberger) kann man daraus ableiten, dass x durch q^2 teilbar ist.

Nun nutzen wir die Casselsche Relation $x - 1 = p^{q-1}a^q$ aus. Modulo q reduziert sie sich zu $-1 = a^q$, denn x ist ja durch q teilbar, und $p^{q-1} \equiv 1 \bmod q$ laut kleinem Fermatschen Satz. Also sind die beiden $q$ten Potenzen -1 und a^q kongruent $\bmod q$; mit Lemma 2.4 folgt daraus $-1 \equiv a^q \bmod q^2$. Also reduziert sich unsere Casselsche Relation modulo q^2 zu $-1 \equiv p^{q-1} \cdot (-1) \bmod q^2$ und damit zu $p \equiv p^q \bmod q^2$. □

Man beachte, dass die Argumentation bisher symmetrisch in p und q war. Insbesondere haben wir jetzt also die *doppelte Wieferich-Bedingung* $q^2|p^q - p$

und $p^2 | q^p - q$. Nun wird diese Symmetrie gebrochen, indem wir ohne Einschränkung $q < p$ annehmen.

Im Appendix B von [**Mih03b**] wird mit analytischen Methoden (Bakers Linearformen in Logarithmen [**Bak72, Bak73, Bak75**] und Argumente von Tijdeman [**Tij76**]) bewiesen, dass $p < q^2$ gelten muss. Insbesondere ist p also nicht kongruent 1 modulo q^2. Aber p ist laut Wieferich-Bedingung eine $q$te Potenz modq^2; mit Lemma 2.4 folgt, dass p nicht kongruent 1 modulo q ist.

Damit erfüllen p und q jetzt die Voraussetzungen des ersten Abschnitts; wir benutzen die dortige Notation weiter.

Proposition 2.5. *Nicht alle cyclotomischen Einheiten in K sind q-primär, d. h. $C_q \neq C$.*

Beweis. Angenommen, $C_q = C$. Sei

$$\tilde{C} := \zeta^{\mathbb{Z}} \cdot C = \langle \pm\zeta, \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta} \rangle \subseteq \mathbb{Z}[\zeta]^*$$

die Gruppe der cyclotomischen Einheiten im vollen Kreisteilungskörper $\tilde{K} = \mathbb{Q}(\zeta)$. Weil ζ eine $q$te Potenz und damit ohnehin q-primär ist, sind dann also alle Elemente aus $\tilde{C}$ – insbesondere alle $\frac{1-\zeta^n}{1-\zeta}$ – q-primär. Die Wieferich-Bedingung in Satz 2.3 besagt, dass $p = \prod_{n=1}^{p-1}(1-\zeta^n)$ ebenfalls q-primär ist. Zusammen impliziert das, dass $1-\zeta^n$ auch q-primär ist für alle n.

Laut binomischer Formel gilt für alle r

$$1 - \zeta^{rq} \equiv (1-\zeta^r)^q \bmod q.$$

Wie wir gerade gesehen haben, ist die linke Seite hier q-primär; mit Lemma 2.4 folgt daraus

$$1 - \zeta^{rq} \equiv (1-\zeta^r)^q \bmod q^2.$$

Nun wählen wir ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ über q und setzen $\mathbb{F}_q(\zeta) := \mathbb{Z}[\zeta]/\mathfrak{m}$. Letztere Kongruenz bedeutet, dass $\zeta^r \in \mathbb{F}_q(\zeta)$ für alle r eine Nullstelle vom Bild des Polynoms

$$\frac{(1-T)^q - (1-T^q)}{qT} \in \mathbb{Z}[T]$$

in $\mathbb{F}_q[T]$ ist. Also hat dieses Polynom vom Grad $q-1$ mindestens p verschiedene Nullstellen $1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-1} \in \mathbb{F}_q(\zeta)$. Dieser Widerspruch zu unserer Annahme $q < p$ beweist die Behauptung $C_q \neq C$. $\square$

Insbesondere ist der $\mathbb{F}_q[G]$-Modul C_q/C^q also ein echter Untermodul von C/C^q. Letzterer ist aber isomorph zu $\bigoplus_{i\neq 0}\varepsilon_i\mathbb{F}_q[G]$, denn die Abbildung

$$\frac{\mathbb{F}_q[G]}{\varepsilon_0\mathbb{F}_q[G]}\longrightarrow\frac{C}{C^q},\qquad \alpha\mapsto\left(\frac{\zeta^r-\zeta^{-r}}{\zeta-\zeta^{-1}}\right)^{\alpha}$$

ist ein G-Isomorphismus, wenn r eine Primitivwurzel modulo p ist. Damit folgt, dass es einen Index $i\neq 0$ gibt, für den das Idempotente $\varepsilon_i\in\mathbb{F}_q[G]$ den Galoismodul C_q/C^q annulliert. Wir fixieren ein solches ε_i.

Satz 2.6. *ε_i annulliert auch $(x-\zeta)(x-\zeta^{-1})\in K^*/(K^*)^q$.*

*Beweis***.** Laut Korollar 1.3 annulliert der Lift $\hat{\varepsilon}_i\in\mathbb{Z}_q[G]$ von ε_i die q-Sylowuntergruppe der Klassengruppe $\mathrm{Cl}(K)$. Daher annulliert ε_i die q-Torsion in $\mathrm{Cl}(K)$, insbesondere die Klasse des Ideals $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}\subset\mathscr{O}_K$, wobei $\mathfrak{a}\subset\mathbb{Z}[\zeta]$ die durch Korollar 2.2 gegebene $q$te Wurzel des Hauptideals $(\frac{x-\zeta}{1-\zeta})$ ist. Das bedeutet

$$\left(\frac{(x-\zeta)(x-\zeta^{-1})}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})}\right)^{\varepsilon_i}\in\frac{E\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}.$$

Das Hauptideal $(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})\subset\mathscr{O}_K$ liegt über der total verzweigten Primstelle p von $\mathbb{Z}$ und ist deshalb invariant unter der Galoisgruppe G. Die Operation bis auf $q$te Potenzen von $\mathbb{F}_q[G]$ auf diesem Ideal faktorisiert daher durch die Augmentationsabbildung $\mathbb{F}_q[G]\to\mathbb{F}_q$. Aber ε_i hat Augmentation 0. Also ist $((1-\zeta)(1-\zeta^{-1}))^{\varepsilon_i}$ bis auf $q$te Potenzen eine Einheit; damit folgt

$$((x-\zeta)(x-\zeta^{-1}))^{\varepsilon_i}\in\frac{E\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}.$$

Wieder wegen Korollar 1.3 annulliert ε_i den Galoismodul $\frac{E}{C\cdot E^q}$, d. h. es bildet $\frac{E\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}$ nach $\frac{C\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}$ ab. Da ε_i idempotent ist, ergibt sich damit

$$((x-\zeta)(x-\zeta^{-1}))^{\varepsilon_i}\in\frac{C\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}.$$

Laut Satz 2.3 ist x durch q^2 teilbar. Also ist die linke Seite kongruent 1 modulo q^2 und damit insbesondere q-primär, d. h.

$$((x-\zeta)(x-\zeta^{-1}))^{\varepsilon_i}\in\frac{C_q\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}.$$

Aber nach Konstruktion annulliert ε_i auch C_q/C^q und damit $\frac{C_q\cdot(K^*)^q}{(K^*)^q}$. Da ε_i idempotent ist, folgt die Behauptung. $\square$

Nun liften wir $\varepsilon_i \in \mathbb{F}_q[G]$ so zu
$$\alpha^+ = \sum_{\sigma \in G} \alpha^+_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[G],$$
dass $0 \leqslant \alpha^+_\sigma < q$ für alle σ gilt. Entsprechend liften wir $-\varepsilon_i$ zu $\alpha^- \in \mathbb{Z}[G]$. Weil ε_i Augmentation 0 hat, haben α^+ und α^- Augmentation h^+q und h^-q für zwei natürliche Zahlen h^+ und h^- mit $h^+ + h^- \leqslant |G| = (p-1)/2$.

Wir haben eine kanonische $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[\tilde{G}]$, die jedes $\sigma \in G$ auf die Summe in $\mathbb{Z}[\tilde{G}]$ der beiden Urbilder von σ in $\tilde{G}$ abbildet. Wir setzen
$$\alpha = \sum_{\sigma \in \tilde{G}} \alpha_\sigma \sigma := \begin{cases} \Phi(\alpha^+) & \text{falls } h^+ \leqslant h^-, \\ \Phi(\alpha^-) & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann hat $\alpha \in \mathbb{Z}[\tilde{G}]$ Augmentation hq mit $h \leqslant (p-1)/2$, und
$$(x-\zeta)^\alpha = ((x-\zeta)(x-\zeta^{-1}))^{\alpha^\pm}$$
ist laut Satz 2.6 $q$te Potenz eines Elementes $\nu \in K$. Hierbei ist automatisch $\nu \in \mathscr{O}_K$. Wir vergleichen jetzt ν mit einer durch Potenzreihenentwicklung gezogenen $q$ten Wurzel aus $(x-\zeta)^\alpha$.

Sei $f(T) = \sum_{k \geqslant 0} a_k T^k \in \tilde{K}[[T]]$ die Potenzreihenentwicklung von $(1 - \zeta T)^{\alpha/q}$, d. h. genauer
$$f(T) = \prod_{\sigma \in \tilde{G}} \sum_{k \geqslant 0} \binom{\alpha_\sigma / q}{k} (-\zeta^\sigma T)^k.$$
Diese Potenzreihe hat Konvergenzradius 1, denn sie wird von der geometrischen Reihe $(1-T)^{-h}$ majorisiert. Weil α im Bild von Φ liegt, sind die Koeffizienten von f reell, also $a_k \in K$. Die Nenner der Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha_\sigma/q}{k}$ und damit auch der a_k sind Potenzen von q; genauer gilt $q^{k+v_q(k!)} a_k \in \mathscr{O}_K$, wobei $v_q(k!)$ den Exponenten der größten Potenz von q bezeichnet, die $k!$ teilt. Eine kleinere Potenz von q reicht nicht, um a_k ganz zu machen, denn
$$q^k k! \cdot a_k \equiv \big(-\sum_{\sigma \in \tilde{G}} \alpha_\sigma \zeta^\sigma\big)^k \not\equiv 0 \bmod q.$$
Indem wir $T = x^{-1}$ in f einsetzen, erhalten wir $\nu = x^h \cdot f(x^{-1})$, also
$$q^{h+v_q(h!)} \nu = \sum_{k \geqslant 0} q^{h+v_q(h!)} a_k x^{h-k}.$$
Alle Summanden der rechten Seite mit $k < h$ sowie die linke Seite sind hier ganz und sogar durch q teilbar. Der Summand mit $k = h$ ist ganz, aber nicht

durch q teilbar. Daraus folgt

$$\sum_{k>h} q^{h+v_q(h!)} a_k x^{h-k} \in \mathscr{O}_K \setminus \{0\}. \tag{3}$$

Andererseits gibt es untere Abschätzungen für $|x|$ in Termen von p und q, die auf Hyyrö [**Hyy64a, Hyy64b**] zurückgehen. Im Appendix A von [**Mih03b**] wird eine derartige Abschätzung bewiesen, die impliziert, dass die Norm von (3) kleiner als 1 ist. Dieser Widerspruch beweist die Catalan-Vermutung.

References

[Bak72] A. BAKER – A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* **21** (1972), 117–129.

[Bak73] ______, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms. II, *Acta Arith.* **24** (1973), 33–36. (errata insert).

[Bak75] ______, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms. III, *Acta Arith.* **27** (1975), 247–252.

[Cas53] J. W. S. CASSELS – On the equation $a^x - b^y = 1$, *Amer. J. Math.* **75** (1953), 159–162.

[Cas60] ______, On the equation $a^x - b^y = 1$. II, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **56** (1960), 97–103.

[Hyy64a] S. HYYRÖ – Über das Catalansche Problem, *Ann. Univ. Turku. Ser. A I No.* **79** (1964), 10.

[Hyy64b] ______, Über die Gleichung $ax^n - by^n = z$ und das Catalansche Problem, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.* **355** (1964), 50.

[Ko 65] C. KO [KO CHAO] – On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$, *Sci. Sinica* **14** (1965), 457–460.

[Leb50] V. A. LEBESGUE – Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$, *Nouv. Ann. Math.* **9** (1850), 178–181.

[Mih03a] P. MIHĂILESCU – A class number free criterion for Catalan's conjecture, *J. Number Theory* **99** (2003), no. 2, 225–231.

[Mih03b] ______, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, http://www-math.uni-paderborn.de/ preda/, eingereicht beim *J. Reine Angew. Math.*, 2003.

[Tha88] F. THAINE – On the ideal class groups of real abelian number fields, *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 1, 1–18.

[Tij76] R. TIJDEMAN – On the equation of Catalan, *Acta Arith.* **29** (1976), no. 2, 197–209.

[Was82] L. C. WASHINGTON – *Introduction to cyclotomic fields*, Band 83 der Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 127–135
Universität Göttingen, 2003-04

WENIG VERZWEIGTE GEOMETRISCHE LANGLANDS-KORRESPONDENZ

J. Heinloth
Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstr. 3-5, 37073 Göttingen, Germany • *E-mail :* heinloth@uni-math.gwdg.de

Abstract. Im Vortrag wurde eine Einführung in die geometrische Langlands–Korrespondenz gegeben, mit Hinblick auf neuere Resultate im wenig verzweigten Fall.

Im Wintersemester 2003/2004 habe ich im Seminar über geometrische Methoden in der Darstellungstheorie einen Vortrag mit obigem Titel gehalten. Der Vortrag sollte eine Einführung zu den Resultaten meiner Dissertation [**Hei03**] sein, wobei ich versucht habe, möglichst wenige Techniken zu verwenden. Deshalb sind alle Resultate wohlbekannt, und es gibt auch schöne Einführungen in die Fragestellung, z. B. Laumons Artikel über geometrische Eisensteinreihen [**Lau90**] und seinen Bourbaki Vortrag [**Lau**], die sehr viel mehr darstellen, aber auch mehr Vorkenntnisse voraussetzen.

December 10th, 2003.

1. Unverzweigte Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper

Sei $C_{/k=\mathbb{F}_p}$ eine glatte, projektive, geometrisch irreduzible Kurve über einem endlichen Körper (im Verlauf des Vortrags werden wir auch beliebige Grundkörper, z. B. $\mathbb{C}$ zulassen, aber zunächst ist $k = \mathbb{F}_p$). Mit $k(C)$ bezeichnen wir den Körper der meromorphen Funktionen auf C.

In dieser Situation beschreibt das Artinsche Reziprozitätsgesetz (für den Spezialfall unverzweigter Erweiterungen) abelsche Körpererweiterungen von $k(C)$:

Satz 1.1. *(Artinsches Reziprozitätsgesetz)*

$$\begin{pmatrix} \textit{endl. Quotienten der} \\ \textit{Idealklassengruppe} \end{pmatrix} \xrightarrow{\cong} \begin{pmatrix} \textit{Galoisgruppen endl. abelscher} \\ \textit{unverzweigter Erweiterungen } L|k(C) \end{pmatrix}$$

Hierbei ist die Idealklassengruppe definiert als

$$Cl = k(C)^* \backslash \prod_{p\in C}{}' K_p^* / \prod_{p\in C} \hat{\mathscr{O}}_p^*.$$

Das kann man auch geometrisch formulieren:

$$\prod_{p\in C}{}' K_p^* / \prod_{p\in C} \hat{\mathscr{O}}_p^* = \oplus_{p\in C}\mathbb{Z},$$

dies ist die Gruppe der Divisoren auf C und also ist Cl die Gruppe der Divisoren modulo Hauptdivisoren, d. h. die Gruppe Pic_C der Geradenbündel auf C.

Um die rechte Seite geometrisch zu erklären, bemerkt man, daß endliche Erweiterungen $L|k(C)$ dasselbe sind wie Kurven C' zusammen mit einer surjektiven Abbildung $C' \to C$, wobei $L = k(C')$. Unverzweigte Körpererweiterungen sind genau solche, für die die Abbildung $C' \to C$ eine Überlagerung ist.

Die Strategie der Beweise des Reziprozitätsgesetzes ist: Zu einer Erweiterung $L|k(C)$ definiert man den Homomorphismus $Rez_{L|k} : \oplus_{p\in C}\mathbb{Z}\cdot p \to Gal(L|k(C)$ durch: $p \mapsto \mathrm{Frob}_p$, wobei Frob_p der Frobenius an der Stelle p ist (wird im 2. Abschnitt definiert). Nach dem Dichtigkeitssatz von Cebotarev ist diese Abbildung surjektiv (dieser Satz ist in dieser Situation nicht so schwer zu beweisen). Das Problem ist jedoch, zu zeigen, daß Hauptdivisoren unter dieser Abbildung nach Null abgebildet werden. Darum möchte ich zunächst erklären, wie man dies mit geometrischen Methoden leicht einsehen kann (dieser Beweis von Deligne steht z. B. in [**Lau90**]).

2. Exkurs: Étale Topologie und Frobenii

Eine Abbildung $\pi : C' \to C$ heißt Überlagerung ($\Leftrightarrow$ π ist étale) genau dann, wenn π glatt mit nulldimensionalen Fasern ist. Insbesondere gilt für die Differentiale $\pi^*\Omega_C \cong \Omega_{C'}$. Eine Überlagerung heißt Galoisüberlagerung wenn $\#\,\mathrm{Aut}(C'/C) = [k(C') : k(C)]$ gilt.

Für jeden Punkt $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) = p \in C$ ist das Urbild $\pi^{-1}(p)$ unter einer Überlagerung π also eine endliche Menge von Punkten: $\pi^{-1}(p) = \coprod q_i = \coprod \mathrm{Spec}(k(q_i))$. Und $k(q_i) = \mathbb{F}_{q^{r_i}}$. Für eine Galoisüberlagerung π ist dann aus Dimensionsgründen

$$Gal(\mathbb{F}_{q^{r_i}}/\mathbb{F}_q) = Stab_{\mathrm{Aut}(C'/C)}(q_i) \subset Aut(C'/C).$$

Die Gruppe $Gal(\mathbb{F}_{q^{r_i}}/\mathbb{F}_q)$ hat aber ein ausgezeichnetes Element $Frob = (\quad)^q$, dessen Bild in $Aut(C'/C)$ heißt $Frob_p$. Wenn $Aut(C'/C)$ kommutativ ist, so hängt $Frob_p$ nicht von der Wahl von q_i ab, andernfalls ist $Frob_p$ nur bis auf Konjugation bestimmt.

Grothendieck definiert die *étale Fundamentalgruppe von C* als

$$\pi_1(C) := \lim_{C'/C \text{ Galois}} Aut(C'/C)(= Gal(k(C)^{\mathrm{uv}}/k(C))).$$

(Vorsicht: Um den Limes auf der rechten Seite richtig zu definieren, muß man, wie in der Topologie, Basispunkte wählen, d. h. wir betrachten C zusammen mit einem Punkt $\overline{p} = \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to C$ und nehmen den Limes über alle Überlagerungen $(C', \overline{p}') \to (C, \overline{p})$, die die Grundpunkte aufeinander abbilden. Das Ergebnis ist bis auf Konjugation unabhängig von der Wahl des Grundpunktes.)

Bemerkung 2.1. Die Hurwitzformel zeigt, daß über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $k = \overline{k}$ gilt $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}) = 1$. Es gilt immer:

$$\pi_1(\mathbb{P}^1_k) = \pi_1(k) = \mathrm{Gal}(k^{sep}|k).$$

Die Idee ist nun, statt der Gruppe $\pi_1(C)$ ihre Darstellungen zu studieren. Diese kann man wie in der Topologie als lokal-konstante Garben auf C geometrisch interpretieren:

Definition 2.1. Eine *étale Garbe* L auf C ist gegeben durch eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{U \xrightarrow{\text{étale}} C\} & \to & \text{Mengen} \\ U & \mapsto & \mathsf{L}(U) \text{ die Menge der } \textit{Schnitte von } \mathsf{L} \textit{ über } U \end{array}$$

mit Einschränkungsabbildungen: zu einem Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr] \arrow[dr, "\text{étale}"'] & & U \arrow[dl, "\text{étale}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

(man denke an $V \subset U$) gibt es eine Abbildung

$$\mathsf{L}(U) \to \mathsf{L}(V),$$

so daß die Abbildungen mit Verkettungen $V' \to V \to U$ verträglich sind.

Außerdem soll eine Verklebebedingung gelten: Zu $U_1, U_2 \to C$ étale ist $U_1 \cap U_2 := U_1 \times_C U_2$, das ist wieder étale über C. Mit dieser Definition sollen die üblichen (zwei) Garbenaxiome gelten.

Beispiel 1: Gegeben ein $n-$dimensionaler $\overline{\mathbb{Q}}_\ell-$Vektorraum[(1)] V und eine Darstellung $\rho : \pi_1(C) \to \mathsf{GL}(V)$ (z. B. $V = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$). Dann definiert jede Abbildung $U \to C$ eine Abbildung $\pi_1(U) \to \pi_1(C)$, und damit können wir eine étale Garbe L_ρ definieren als $\mathsf{L}_\rho(U) := V^{\pi_1(U)}$. (Um die Garbenaxiome zu prüfen, benötigt man, daß die Abbildungen $\pi_1(U) \to \pi_1(C)$ injektiv sind, für Kurven C ist das nicht schwer.)

Beispiel 2: Für einen Punkt $\mathrm{Spec}(k(p)) = p$ ist eine Garbe auf p dasselbe wie ein Modul V unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k(p)^{sep}/k(p))$.

Insbesondere können wir in der Situation von Beispiel 1 also die Faser $\mathsf{L}|_p$ der Garbe L bei p definieren als den Galoismodul

$$\big(V, \mathrm{Gal}(k(p)^{sep}|k(p))\big) = \big(V, Stab_{\pi_1(C)}(p)\big).$$

Hieran können wir ablesen, daß wir für $C/\mathbb{F}_p$ jede eindimensionale Darstellung $\chi : \pi_1(C) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ wieder aus der Garbe zurückbekommen, denn $\chi(\mathrm{Frob}_p) =$ (Eigenwert von Frob_p auf $\mathsf{L}|p$).

Dies nennt man auch *Garben-Funktionen-Wörterbuch*: Man ordnet jeder Garbe F von $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ Vektorräumen auf C die Funktion $tr_{\mathsf{F}} : \cup_{n\geqslant 1} C(\mathbb{F}_{p^n}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ gegeben durch $(p \to C) \mapsto tr_{\mathsf{F}}(p) = Spur(Frob_p, \mathsf{F}|_p)$ zu.

Bemerkung 2.2. Unter dieser Zuordnung wird aus f^* für Garben das Zurückziehen von Funktionen, $\otimes, \oplus$ werden zu $\cdot, +$ und es gibt ein Wunder (das wird erst später benötigt): die *Grothendieck-Lefschetz-Spurformel* sagt, daß der Funktor $\mathbf{R}f_!$ zur Abbildung $f_!$ auf Funktionen wird, die durch die Summation über die Punkte in den Fasern gegeben ist.

---

(1) Man kann aus technischen Gründen nicht mit $\mathbb{C}$-Vektorräumen arbeiten

3. Das unverzweige Reziprozitätsgesetz für Funktionenkörper (geometrischer Beweis)

Sei nun eine eindimensionale Darstellung $\rho : \pi_1(C) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ der Fundamentalgruppe von C gegeben. Diese definiert wie oben eine eindimensionale lokal konstante Garbe $\mathsf{L} := \mathsf{L}_\rho$ auf C.

Wir suchen nun zunächst eine Garbe auf dem Raum der effektiven Divisoren auf C , die zur Funktion $\rho \circ Rez_{L|K}$ korrespondiert. Der Raum der Divisoren vom Grad d ist gegeben als das symmetrische Produkt der Kurve: $\mathrm{Div}^d_{\mathrm{eff}} = C^{(d)} := (C^{\times d}/S_d)$. Wir haben auf $C^{\times d}$ eine Garbe $\otimes_{i=1}^d pr_i^* \mathsf{L} =: \mathsf{L}^{\boxtimes n}$. Damit können wir auf dem symmetrischen Produkt der Kurve $C^{(d)} := C^{\times d}/S_d$ via der Abbildung $sym : C^d \to C^{(d)}$ eine lokal konstante Garbe $\mathsf{L}^{(d)} := sym_*(\mathsf{L}^{\boxtimes d})^{S_d}$ definiern.

Bemerkung 3.1. Nach Beispiel 2 hat diese Garbe die gesuchte Spurfunktion $tr_{\mathsf{L}^{(d)}} = \rho \circ Rez_{L|K}|_{Div^d_{eff}}$.

Außerdem sind die Fasern der Abbildung $C^{(d)} \to \mathrm{Pic}^d_C$ projektive Räume, also ist (weil $\pi_1(\mathbb{P}^1_k) = \pi_1(k)$) die Spurfunktion $tr_{\mathsf{L}^{(d)}}$ auf den Fasern konstant, und das beweist den oben angegebenen Spezialfall des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Es gilt sogar mehr: Die Garbe $\mathsf{L}^{(d)}$ steigt zu einem lokalen $\mathsf{A_L}$-System auf Pic ab, das zudem die folgende Eigenschaft hat:

Für $+ : \mathrm{Pic} \times C \to \mathrm{Pic}$ gegeben durch $(\mathscr{L}, p) \mapsto \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_C(p)$ gilt $+^*(\mathsf{A_L}) = \mathsf{A_L} \boxtimes \mathsf{L}$. Beides folgt aus allgemeinen Resultaten über die étale Fundamentalgruppe.

4. Erstaunliche Verallgemeinerung: Geometrische Langlands-Korrespondenz

Für irreduzible $n-$dimensionale lokale Systeme auf einer Kurve C gibt es nun eine Verallgemeinerung der geometrischen Version der Klassenkörpertheorie, die ich noch kurz andeuten möchte.

Im Fall von Kurven über endlichen Körpern gibt die Langlands Korrespondenz, die in dieser Situation von Lafforgue bewiesen wurde, eine Bijektion(2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irred. n-dim } \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-Darst.} \\ \text{von } Gal^{\mathrm{Weil}}(k(C)^{alg}/k(C)) \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{irred. Darst. } \pi \text{ von } \mathsf{GL}_n(\mathbb{A}_{k(C)}), \text{ die in} \\ \mathscr{C}_c^\infty(\mathsf{GL}_n(k(C))\backslash \mathsf{GL}_n(\mathbb{A}_{k(C)})) \text{ vorkommen} \end{array} \right\}$$

(2) Der obere Index “Weil” bezeichnet die Weil-Gruppe, die sich hier von der Galois-Gruppe dadurch unterscheidet, daß man die Galoisgruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ des endlichen Grundkörpers durch $\mathbb{Z}$ ersetzt.

Nun ist $\pi_1(C)$ ein Quotient von $Gal(k(C)^{sep}/k(C))$, und deshalb können wir auf der linken Seite die Teilmenge der Darstellungen von π_1^{Weil} betrachten, die wir wieder als n-dimensionale lokal konstante Garben auffassen.

Zu dieser Teilmenge korrespondiert auf der rechten Seite die Menge der Darstellungen, die eine Funktion f_π enthalten, die unter $\mathsf{GL}_n(\prod_{p\in C}\hat{\mathscr{O}}_p)$ invariant ist. Ganz ähnlich wie im Fall der Idealklassengruppe können wir diese Funktionen wieder als Funktion auf der Menge der Vektorbündel vom Rang n auf C auffassen. Den Raum der Vektorbündel bezeichnen wir mit Bun_n und erhalten:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{irred. n-dim lokal konstante}\\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell-\text{Garben auf } C\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{irred. Darst. } \pi \text{ von } \mathsf{GL}_n(\mathbb{A}_{k(C)}),\\ \text{die von einer Funktion}\\ f_\pi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{Bun}_n)\text{ erzeugt werden}\end{array}\right\}$$

Hierbei ist die Funktion f_π dadurch charakterisiert, daß sie eine Eigenfunktion für die Operation der Hecke-Algebra ist. Diese Operation möchte ich gleich in der geometrischen Sprache definieren, sie ist ähnlich der Eigenschaft, die am Ende des 1-dimensionalen Falles festgestellt wurde: Wir definieren einen weiteren Modulraum (ein algebraischer Stack), der Paare von Vektorbündeln auf C parametrisiert:

$$Hecke^1 := \left\langle (p,\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}\subset\mathscr{E}'(p)) \;\middle|\; \begin{array}{l} p\in C\\ \mathscr{E},\mathscr{E}'\in\mathrm{Bun}_n\\ \text{Länge}(\mathscr{E}/\mathscr{E}')=1\end{array}\right\rangle$$

Dieser hat zwei Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} & Hecke^1 \arrow[dl, "(\mathscr{E})"', "\pi_{\text{gross}}"] \arrow[dr, "(\mathscr{E}'{,}p)", "\pi_{\text{klein}}\times\text{supp}"'] & \\ \mathrm{Bun}_n & & \mathrm{Bun}_n\times C \end{tikzcd}$$

Und man definiert den Hecke-Funktor:

$$\begin{array}{rcl} H^1: D^b(\mathrm{Bun}_n) & \to & D^b(\mathrm{Bun}_n\times C)\\ \mathsf{F} & \mapsto & \mathbf{R}(\pi_{\text{klein}\times\text{supp}})_!\pi^*_{\text{groß}}\mathsf{F}\end{array}$$

Dann gilt (siehe [**Dri83**],[**FGV02**],[**Gai**]):

Satz 4.1. *($n=2$ Drinfel'd; $n\geqslant 2$: Frenkel,Gaitsgory,Kazhdan,Vilonen; Vermutung von Laumon) Zu jedem irreduziblen n-dimensionalen lokalen System auf C gibt es genau eine irreduzible perverse Garbe $\mathsf{A_E}$ auf* Bun_n *mit:*

1. $H^1\mathsf{A_E}\cong\mathsf{A_E}\boxtimes\mathsf{E}(:=p_1^*\mathsf{A_E}\otimes p_2^*\mathsf{E})$,
2. *Der Isomorphismus $H^1\circ H^1\mathsf{A_E}\cong\mathsf{A_E}\boxtimes\mathsf{E}\boxtimes\mathsf{E}$ ist S_2-äquivariant.*

Bemerkung 4.2. Eine perverse Garbe ist ein Komplex von Garben, der über einer offenen Teilmenge seines Trägers lokal konstant ist und weitere gute Eigenschaften hat.

Aus dem Satz folgt auch, daß die Spurfunktion $tr_{\mathsf{A}_\mathsf{E}}$ die gesuchte Funktion f_π ist.

5. Wenig verzweigte lokale Systeme

Die Langlands-Korrespondenz legt nahe zu versuchen, auch den Fall von verzweigter Darstellungen geometrisch zu interpretieren, d. h. aus einem lokalen System, das nur auf einem offenen Teil $U \subset C$ definiert ist, eine Garbe A_E auf einem Modulraum von Vektorbündeln mit Zusatzstruktur bei $S := C - U$ zu konstruieren.

Der einfachste Fall eines verzweigten Systems ist der eines Systems mit unzerlegbarer unipotenter Verzweigung: Im Fall von punktierten Riemannschen Flächen enthält die Fundamentalgruppe lokal um jede Punktierung das ausgezeichnete Element, das aus einer einfachen Schleife um die Punktierung besteht. Unzerlegbare, unipotente Verzweigung bedeutet hier, daß dieses Element durch ein unipotentes Element von GL_n mit einem einzigen Jordanblock operiert.

Im Fall $C/\mathbb{F}_p$ hat man ebenfalls eine Untergruppe, die zahme Verzweigungsgruppe, von der wir voraussetzen, daß diese durch unipotente Elemente mit einem eindimensionalen invarianten Unterraum operiert.

Dann erwartet man, daß man einen Komplex auf dem Modulraum $\mathrm{Bun}_{n,S}$ der Vektoründel auf C zusammen mit vollen Flaggen von Unterräumen in den Fasern der Punkte in $S = C - U$ konstruieren kann:

$$\mathrm{Bun}_{n,S} := \langle \big(\mathscr{E}, (V_{i,p})_{\substack{i=1,\dots,n \\ p\in S}}\big) \,|\, \mathscr{E} \in \mathrm{Bun}_n; 0 \subset V_{1,p} \subset \cdots \subset V_{n,p} = \mathscr{E} \otimes k(p) \rangle.$$

Diese Definition kann man umschreiben zu:

$$\mathrm{Bun}_{n,S}(T) := \left\langle \mathscr{E}^\bullet = \big(\mathscr{E}, (\mathscr{E}^{(i,p)})_{\substack{i=1,\dots,n \\ p\in S}}\big) \;\middle|\; \begin{matrix} \mathscr{E}, \mathscr{E}^{(i,p)} \in \mathrm{Bun}_n \\ \mathscr{E} \subset \mathscr{E}^{(1,p)} \subset \cdots \subset \mathscr{E}^{(n,p)} = \mathscr{E}(p) \end{matrix} \right\rangle .$$

Mit dieser Formulierung können Inklusionen $(\mathscr{E}', \mathscr{E}'^{(i,p)}) \subset (\mathscr{E}, \mathscr{E}^{(i,p)})$ komponentenweise definiert werden.

Um den Satz des vorhergehenden Kapitels nun auf diese Situation zu übertragen, benötigt man einen Begriff, der die Zusatzstruktur der Flaggen bei S auf kohärente Garben erweitert. Insbesondere benötigt man Modulräume, die Quotienten $\mathscr{E}^\bullet/\mathscr{E}'^\bullet$ parametrisieren, um wieder Hecke-Operatoren definieren zu können. Das geht wie folgt:

Definition 5.1. Eine *kohärente Garbe mit parabolischer Struktur bei S* ist eine Kollektion $\mathscr{F}^\bullet := (\mathscr{F} = \mathscr{F}^{(0,p)}, \mathscr{F}^{(i,p)})_{i=1,\dots,n-1;p\in S}$ zusammen mit Abbildungen $\varphi^{(i,p)} : \mathscr{F}^{(i-1,p)} \to \mathscr{F}^{(i,p)}$ für $i = 1,\dots,n$ und $p \in S$ (wo $\mathscr{F}^{(n,p)} := \mathscr{F}(p)$), so daß in der Sequenz:

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{(n,p)}(-p)} \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi^{(1,p)}} \mathscr{F}^{(1,p)} \dots \xrightarrow{\varphi^{(n-1,p)}} \mathscr{F}^{(n-1,p)} \xrightarrow{\varphi^{(n,p)}} \mathscr{F}(p) \xrightarrow{\varphi^{(1,p)}(p)} \mathscr{F}^{(1,p)}(p) \dots$$

die Verkettung von n Abbildungen $\mathscr{F}^{(i,p)} \xrightarrow{\varphi^{(i-1,p)}(p)\circ\dots\circ\varphi^{(i,p)}} \mathscr{F}^{(i,p)}(p)$ gleich der natürlichen Abbildung ist.

Hierbei sind die Abbildungen $\varphi^{(i,p)}$ nicht mehr notwendig injektiv.

Die Quotienten $\mathscr{E}^\bullet/\mathscr{E}'^\bullet$ sind Torsionsgarben mit parabolischer Struktur, und diese Objekte haben glatte Modulräume $\mathrm{Coh}_{0,S}$. Damit kann man wie zuvor Hecke-Operatoren definieren, die diesmal auf dem Niveau von Funktionen der sogenannten Iwahori-Hecke-Algebra entsprechen.

Es gilt dann (siehe [**Dri87**],[**Hei03**]):

Satz 5.1. *($n = 2$ Drinfel'd) Zu jedem irreduziblen n-dimensionalen lokalen System auf $C - S$ mit unzerlegbarer unipotenter Verzweigung bei S und $n \leqslant 3$ gibt es genau eine irreduzible perverse Garbe A_E auf $\mathrm{Bun}_{n,S}$, die eine Eigengarbe für die Iwahori-Hecke-Algebra ist.*

References

[Dri83] V. G. Drinfel′d – Two-dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2), *Amer. J. Math.* **105** (1983), no. 1, 85–114.

[Dri87] ———, Two-dimensional l-adic representations of the Galois group of a global field of characteristic p and automorphic forms on GL(2), *J. Sov. Math.* **36** (1987), 93–105.

[FGV02] E. Frenkel, D. Gaitsgory & K. Vilonen – On the geometric Langlands conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 2, 367–417 (electronic).

[Gai] D. Gaitsgory – On a vanishing conjecture appearing in the geometric Langlands correspondence, arXiv:math.AG/0204081.

[Hei03] J. Heinloth – Coherent sheaves with parabolic structure and construction of Hecke eigensheaves for some ramified local systems, 2003, Dissertation, Universität Bonn.

[Lau] G. Laumon – Travaux de Frenkel, Gaitsgory et Vilonen sur la correspondance de Drinfeld-Langlands, arXiv:math.AG/0207078.

[Lau90] G. Laumon – Faisceaux automorphes liés aux séries d'Eisenstein, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, 227–281.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 137–142
Universität Göttingen, 2003-04

MILNORSCHE K-GRUPPEN UND ENDLICHE KÖRPERERWEITERUNGEN

K. J. Becher
Universität Konstanz, FB Mathematik und Statistik, 78457 Konstanz, Germany
E-mail : becher@maths.ucd.ie

Abstract. Let E/F be a finite separable field extension and let m denote the integral part of $\log_2[E:F]$. David Leep showed that if $\mathrm{char}(F) \neq 2$, then for $n \geqslant m$ the nth power of the fundamental ideal in the Witt ring of E satisfies the equality $I^nE = I^{n-m}F \cdot I^mE$. In this note I present the analogous equality for the Milnor K-groups, that is $K_nE = K_{n-m}F \cdot K_mE$ for $n \geqslant m$.

1. Potenzen des Fundamentalideals

David Leep hat kürzlich für endliche Körpererweiterungen E/F der Charakteristik ungleich 2 die Beziehung zwischen den Wittringen $W(F)$ und $W(E)$ untersucht [**Lee01**]. Im Mittelpunkt stehen dabei folgende Fragen:

(1) Falls $I^nF = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt dann $I^{n+1}E = 0$?
(2) Wie muss $m \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit für $n \geqslant m$ gilt

$$I^nE \;=\; I^{n-m}F \cdot I^mE\ ?$$

December 11th, 2003.

Hierbei bezeichnen wie üblich IF das Fundamentalideal im Wittring $W(F)$ und $I^kF = (IF)^k$ seine k-te Potenz ($k \in \mathbb{N}$). Ferner wird $W(E)$ auch als $W(F)$-Algebra aufgefasst.

Ich möchte zunächst Leeps Ergebnisse hierzu erläutern und anschließend entsprechende Fragestellungen für die Beziehungen zwischen den Milnorschen K-Gruppen von F und von E behandeln. Die Darstellung erfolgt in Anlehnung an [**Bec02**].

Ist der Körper F quadratisch abgeschlossen, so ist $IF = 0$. Es ist dann aber nicht ausgeschlossen, dass $IE \neq 0$ für gewisse endliche Erweiterungen E/F gilt. Dies tritt zum Beispiel für jede endliche Erweiterung von F ein, wenn F der quadratische Abschluss des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist.

Man kann also aus $I^nF = 0$ nicht ohne Weiteres $I^nE = 0$ schließen. Zu der Abschwächung dieser Implikation, die in Frage (1) formuliert ist, gibt es jedoch noch kein Gegenbeispiel. Eine positive Antwort auf diese Frage ließe sich erhalten, wenn man wüsste, dass zumindest für ungerade Erweiterungen E/F die Gleichung in Frage (2) schon für $m = 1$ stets erfüllt ist.

David Leep hat nun gezeigt, dass die Wahl $m = [\log_2[E:F]]$ (ganzzahliger Anteil von $\log_2[E:F]$) stets den Anforderungen in Frage (2) genügt. In anderen Worten, man kann stets $m \in \mathbb{N}$ wählen mit $2^m \leqslant [E:F]$ und

$$I^nE \;=\; I^{n-m}F \cdot I^mE \quad \text{für alle } n \geqslant m\,. \tag{1.1}$$

Leep hat außerdem verdeutlicht, dass sich der Wert von m hierbei nicht grundsätzlich verbessern lässt. Um das einzusehen, wählt man einen algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\mathrm{char}(k) \neq 2$, positive ganze Zahlen $m \leqslant n$, sowie Unbestimmte $t_1, \ldots, t_n$, und betrachtet dann die Potenzreihenkörper $E = k(\!(t_1)\!) \ldots (\!(t_n)\!)$ und $F = k(\!(t_1^2)\!) \ldots (\!(t_m^2)\!)(\!(t_{m+1})\!) \ldots (\!(t_n)\!)$. Die Erweiterung E/F ist dann endlich vom Grad 2^m, d.h. es ist $m = \log_2[E:F]$. Weiter ist die kanonische Abbildung $I^{n-m+1}F \longrightarrow I^{n-m+1}E$ trivial, also $I^{n-m+1}F \cdot I^{m-1}E = 0$. Da aber $I^nE \neq 0$ ist, folgt, dass sich in Gleichung (1.1) die Zahl m nicht durch $m-1$ ersetzen lässt.

Für Frage (1) lässt sich unmittelbar aus (1.1) nur für endliche Erweiterungen E/F vom Grad 2 und 3 eine positive Antwort gewinnen. Mit zusätzlichen Tricks konnte Leep dasselbe Ergebnis auch für $[E:F] \leqslant 5$ erzielen.

2. Die Milnorschen K-Gruppen

In [**Bec02**] habe ich Leeps Berechnungen teilweise auf die Milnorschen K-Gruppen übertragen und damit eine zu (1.1) analoge Gleichung beweisen können. Ich möchte nun zunächst die Definition dieser Gruppen in Erinnerung rufen. Sie wurden von Milnor in [**Mil70**] eingeführt.

Sei im Weiteren F ein Körper beliebiger Charakteristik. Für $n \geqslant 1$ bezeichne K_nF die abelsche Gruppe, die erzeugt wird von Elementen der Gestalt $\{a_1, \dots, a_n\}$ $(a_1, \dots, a_n \in F^\times)$, welche *Symbole* genannt werden und welche (nur) den beiden Relationen unterworfen sind, dass $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$ ist, falls $a_i + a_{i+1} = 1$ in F gilt für ein $i < n$, und dass die durch $\{*, \dots, *\}$ gegebene Abbildung $(F^\times)^n \longrightarrow K_nF$ multilinear ist. Die Gruppenoperation in K_n wird additiv geschrieben. Als Konsequenz der definierenden Relationen erhält man weiter für $a_1, \dots, a_n \in F^\times$, dass auch $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$ gilt auch bei $a_i + a_{i+1} = 0$ für ein $i < n$, sowie, dass $\{a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}\} = \operatorname{sgn}(\sigma)\{a_1, \dots, a_n\}$ gilt für jede Permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$ mit Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{+1, -1\}$ (s. [**Mil70**], Lemma 1.3 und Lemma 1.1).

Man setzt außerdem noch $K_0F = \mathbb{Z}$. Die direkte Summe $\bigoplus_{n \geqslant 0} K_nF$ wird dann in natürlicher Weise zu einer graduierten $\mathbb{Z}$-Algebra, die mit K_*F bezeichnet wird. Für eine beliebige Körpererweiterung L/F hat man einen natürlichen Ringhomomorphismus $K_*F \longrightarrow K_*L$ und kann somit K_*L auch als K_*F-Algebra auffassen.

Zentrales Ergebnis in [**Bec02**] ist der folgende Satz (dort 'Theorem 1.1'):

Satz 2.1. *Sei E/F eine endliche Erweiterung, wobei $E = F(\theta)$ ist für ein $\theta \in F^\times$, und sei $n \geqslant 1$. Die Gruppe K_nE wird erzeugt von den Symbolen der Form $\{f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)\}$, wobei $f_1, \dots, f_n \in F[X]$ mit $f_i(\theta) \neq 0$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $\deg(f_i) \leqslant \frac{1}{2}\deg(f_{i+1})$ für $1 \leqslant i < n$ und $\deg(f_n) \leqslant \frac{1}{2}[E : F]$.*

Bevor ich einige Erläuterungen zum Beweis gebe, möchte ich einige Konsequenzen des Satzes betrachten. An erster Stelle steht dabei das folgende Analogon zur Gleichung von Leep (1.1).

Folgerung 2.2. *Sei E/F eine separable endliche Körpererweiterung und sei m der ganzzahlige Anteil von $\log_2[E : F]$. Dann gilt*

$$K_nE \;=\; K_{n-m}F \cdot K_mE \text{ für } n \geqslant m\,.$$

Die angegebene Gleichheit bedeutet gerade, dass K_nE sich von denjenigen Symbolen $\{b_1, \dots, b_n\}$ $(b_1, \dots, b_n \in E^\times)$ erzeugen lässt, bei denen die ersten $(n-m)$ Koeffizienten $b_1, \dots, b_{n-m}$ in F liegen.

Zum Beweis wählt man nach dem 'Satz vom Primitiven Element' zur separablen Erweiterung E/F ein $\theta \in E$ mit $E = F(\theta)$. Aus dem Satz folgt dann, dass K_nE erzeugt wird von Symbolen $\{f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)\}$ mit $f_1, \ldots, f_n \in F[X]$ derart, dass $f_i(\theta) \neq 0$ und $\deg(f_i) \leqslant 2^{i-n-1}[E : F]$ für $1 \leqslant i \leqslant n$; insbesondere ist für $i \leqslant n - m$ dann f_i konstant, also $f_i(\theta) \in F^\times$.

Ist nun E/F eine Erweiterung, wie sie in der Einleitung konstruiert wurde, so ist Wert von m auch in der Gleichung der Folgerung schon kleinstmöglich.

Für Erweiterungen E/F mit $[E : F] \leqslant 3$ ergibt die Folgerung, dass $K_nE = K_{n-1}F \cdot K_1E$ ist für $n \geqslant 2$; da hier E/F primitiv sein muss, ist die Voraussetzung der Separabilität überflüssig. Insbesondere erhält man so folgende Aussage, die bereits in [**Mer83**] festgestellt wurde.

Folgerung 2.3 **(Merkurjev).** *Sei E/F eine Körpererweiterung vom Grad 2 oder 3, und seien n und ℓ natürliche Zahlen. Ist die Gruppe K_nF durch ℓ teilbar, so gilt dies auch für $K_{n+1}E$.*

Dies motiviert folgende Frage, die auch als Verallgemeinerung von Frage (1) (der Fall $\ell = 2$) in der Einleitung verstanden werden kann.

Frage 2.4. *Seien E/F eine endliche Körpererweiterung und $n, \ell \in \mathbb{N}$. Angenommen, K_nF ist ℓ-teilbar, folgt dies dann auch für $K_{n+1}E$?*

3. Untersuchung von $K_nF(X)$

Wir betrachten nun die K-Gruppen $K_nF(X)$ ($n \geqslant 0$) des rationalen Funktionenkörpers $F(X)$. Zunächst stellen wir fest, dass $K_nF(X)$ erzeugt wird von Symbolen $\{f_1, \ldots, f_n\}$ mit $f_1, \ldots, f_n \in F[X] \setminus \{0\}$. Es stellt sich in natürlicher Weise das Problem, für eine von Symbolen erzeugte Untergruppe $L \subset K_nF(X)$ die Grade der Polynome $f_i \in F[X]$ der bei der Erzeugung von L notwendigen Symbole $\{f_1, \ldots, f_n\}$ zu beschränken.

Um dieses Problem etwas präziser zu formulieren, versehen wir die Menge $\mathbb{N}^n$ mit der lexikographischen Ordnung. Seien $f_1, \ldots, f_n \in F[X] \setminus \{0\}$ gegeben. Unter welchen Umständen kann das Symbol $\{f_1, \ldots, f_n\} \in K_nF(X)$ ausgedrückt werden als Kombination von Symbolen der Gestalt $\{g_1, \ldots, g_n\}$ mit $(\deg(g_1), \ldots, \deg(g_n)) < (\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n))$?

Bei genauerer Untersuchung dieses Problems stellt sich unter anderem heraus, dass, wenn keine solche Kombination existiert, für $1 \leqslant i < n$ die Beziehung $\deg(f_i) \leqslant \frac{1}{2}\deg(f_{i+1})$ gelten muss. Um zu Ergebnissen dieser Art zu gelangen, braucht man 'Division mit Rest' im Polynomring $F[X]$ sowie das folgende Lemma.

Lemma 3.1. *Sei L ein Körper und seien $f,g,h,t \in L^\times$, wobei $g = fh + t$ gelte. Dann gelten in K_nL die Gleichungen*

$$\{f,g\} \;=\; -\{-h,g\} + \{t,g\} - \{t,h\} - \{t,f\} \;=\; \left\{-h, \frac{1}{g}\right\} + \left\{t, \frac{g}{fh}\right\}.$$

Diese Aussage ergibt sich durch eine einfache Rechung aus der Tatsache, dass $\frac{g}{fh} - \frac{t}{fh} = 1$ in L ist und somit $\{-\frac{t}{fh}, \frac{g}{fh}\} = 0$ in K_nL.

Wir betrachten nun zu einer gegebenen Zahl $d \in \mathbb{N}$ die Untergruppe von $K_nF(X)$ erzeugt von den Symbolen $\{f_1,\dots,f_n\}$, wobei $f_1,\dots,f_n \in F[X]$ Polynome vom Grad höchstens d sind. Wir bezeichnen diese Gruppe mit L_d. Folgendes kann gezeigt werden (siehe [**Bec02**, Proposition 2.3.] für den Beweis):

Proposition 3.2. *Die Gruppe L_d wird erzeugt von den $\{g_1,\dots,g_n\}$ mit $g_1,\dots,g_n \in F[X]$ derart, dass $\deg(g_i) \leqslant \deg(g_{i+1})$ ist für $1 \leqslant i < n$ sowie $\deg(g_n) \leqslant d$.*

Da offenbar $K_nF(X)$ die Vereinigung der Untergruppen L_d ($d \in \mathbb{N}$) ist, folgt auch:

Folgerung 3.3. *Die Gruppe $K_nF(X)$ wird erzeugt von den $\{f_1,\dots,f_n\}$ mit $f_1,\dots,f_n \in F[X]$ derart, dass $\deg(f_i) \leqslant \deg(f_{i+1})$ ist für $1 \leqslant i < n$.*

Vor allem dient Proposition (3.2) aber dazu, den Satz (2.1) herzuleiten. Sei nun also wieder E/F eine endliche Erweiterung und $\theta \in E$ derart, dass $E = F(\theta)$. Es gibt nun (genau) einen Homomorphismus

$$K_nF(X) \longrightarrow K_nE\,,$$

der jedes Symbol $\{f_1,\dots,f_n\}$ auf $\{f_1(\theta),\dots,f_n(\theta)\}$ abbildet, sofern die Polynome $f_1,\dots,f_n \in F[X]$ in θ keine Nullstelle haben, und der jedes Symbol der Gestalt $\{\theta,*,\dots,*\}$ auf Null abbildet (s. [**Mil70**, Lemma 2.2]). Dieser Homomorphismus ist surjektiv, und eine einfache Überlegung zeigt, dass er surjektiv bleibt, wenn man ihn in der Quelle auf die Gruppe L_d einschränkt für $d = \left[\frac{1}{2}[E:F]\right]$. Der Satz (2.1) folgt dann unmittelbar aus der Proposition (3.2).

References

[Bec02] K. J. Becher – Milnor K-groups and finite field extensions, *K-Theory* **27** (2002), no. 3, 245–252.

[Lee01] D. B. Leep – The Witt ring of quadratic forms under algebraic extensions, 2001, preprint.

[Mer83] A. S. Merkurjev – Brauer groups of fields, *Comm. Algebra* **11** (1983), no. 22, 2611–2624.

[Mil70] J. Milnor – Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1969/1970), 318–344.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 143–150
Universität Göttingen, 2003-04

VIRTUELLE FORMEN

K. J. Becher
Universität Konstanz, FB Mathematik und Statistik, 78457 Konstanz, Germany
E-mail : becher@maths.ucd.ie

Abstract. In this research announcement, I introduce *ℓ-forms* ($\ell \in \mathbb{N}$) over an arbitrary field F. They generalise characteristic properties of quadratic forms in such a way, that the latter are the ℓ-forms for $\ell = 2$ when $\mathrm{char}(F) \neq 2$. These ℓ-forms, which I also name *virtual forms* in general, turn out to be useful for the study of the Milnor K-theory of a field. The connection between both areas is established by a series of maps generalizing Delzant's *Stiefel-Whitney-classes*.

1. Einleitung

Quadratische Formen haben viele Aspekte. Einige darunter haben Mathematiker bereits dazu angeregt, Teile der reichen Theorie der quadratischen Formen zu verallgemeinern. Ich möchte an dieser Stelle sogenannte *virtuelle Formen* einführen und dabei gewisse algebraische Eigenschaften quadratischer Formen in einen allgemeineren Kontext übertragen. Diese Objekte, die sich über beliebigen Körpern definieren lassen, sind nützlich für das Studium der Milnorschen K-Gruppen und damit auch der Galois-Kohomologie von Körpern.

December 12th, 2003.

Betrachten wir zunächst einen Körper F mit von 2 verschiedener Charakteristik. Ausgangspunkt für die algebraische Theorie der quadratischen Formen über F, wie sie beispielsweise in [**Lam80**] und in [**Sch85**] dargelegt wird, sind ein paar Schlüsselfeststellungen. Zunächst einmal lassen sich quadratische Formen über F diagonalisieren. Dann gibt der Kürzungssatz von Witt Informationen über das Zusammenspiel von Isometrie und orthogonaler Summe. Damit können der Witt-Ring $W(F)$ und der Witt-Grothendieck-Ring $\hat{W}(F)$ definiert werden. Mit Hilfe des Kettenäquivalenzsatzes von Witt, der erklärt, wann zwei verschiedene Diagonalisierungen (bis auf Isometrie) ein und dieselbe quadratische Form über F beschreiben, kommt man dann noch zu einer Beschreibung der Ringe $W(F)$ und $\hat{W}(F)$ durch Erzeugende und Relationen.

Diese abstrakte Beschreibung des Witt-Grothendieck-Ringes nehme ich zur Leitidee für die Definition einer Gruppe $G(\ell, F)$, der *Gruppe der ℓ-Formen*, wobei nun F ein beliebiger Körper und ℓ irgendeine natürliche Zahl ist. Im Fall $\ell = 2 \neq \mathrm{char}(F)$ wird man dann für $G(F,\ell)$ gerade die Gruppe $\hat{W}(F)$ erhalten.

Ich gebe im Folgenden eine zusammenfassende Darstellung einiger Ergebnisse aus meiner Arbeit [**Bec04**]. Dort sind auch die Beweise zu finden, welche hier nicht oder nur andeutungsweise geführt werden.

2. K-Gruppen und Symbollängen

Zur Definition von ℓ-Formen greife ich auf die von Milnor in [**Mil70**] eingeführten K-Gruppen K_nF ($n \in \mathbb{N}$) des Körpers F zurück. Diese K-Gruppen sind auch das eigentliche Anwendungsziel für die neu einzuführenden Objekte. Ich stelle daher eine kurze Einführung in Milnors K-Theorie voran, bei der ich auch einige offene Fragen auf diesem Gebiet anspreche.

Sei weiterhin F ein Körper und seien n und ℓ natürliche Zahlen, wobei der Wert Null jeweils erlaubt ist. Wir definieren eine abelsche Gruppe $K_n^{(\ell)}F$, mit Operationszeichen '+', über Erzeugende und Relationen. $K_n^{(\ell)}F$ sei erzeugt von Elementen der Gestalt $\{a_1, \ldots, a_n\}$, sogenannten *Symbolen*, wobei $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$ sind. Weiter gelten in $K_n^{(\ell)}F$ folgende Relationen (und nur diejenigen, die sich daraus und aus der Kommutativität der Addition ableiten lassen):

(M1) Die Zuordnung $\{*\} : (F^\times)^n \longrightarrow K_n^{(\ell)}F$ ist $\mathbb{Z}$-multilinear.
(M2) Es gilt $\{a_1, \ldots, a_n\} = 0$, falls $a_i + a_{i+1} = 1$ für ein $i < n$.
(M3) Die Gruppe $K_n^{(\ell)}F$ ist ℓ-torsion, d.h. $\ell \cdot K_n^{(\ell)}F = 0$.

Bei $n \leqslant 1$ betrachten wir (M2) als nichtig, ebenso wie auch (M1) falls $n = 0$. Dann ergibt sich insbesondere $K_0^{(\ell)}F \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ (denn $K_0^{(\ell)}F$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung ℓ, erzeugt vom 'leeren Symbol'). Weiter erhält man wegen (M1) einen kanonischen Isomorphismus

$$F^\times/F^{\times\ell} \longrightarrow K_1^{(\ell)}F\,,$$

der eine Restklasse $aF^{\times\ell}$ in das (einstellige) Symbol $\{a\}$ überführt. Man beachte, dass man mit diesem Gruppenisomorphismus von einer multiplikativ geschriebenen Gruppe in eine additiv geschriebene Gruppe übergeht. Wir haben den Fall $\ell = 0$ nicht ausgeschlossen, obwohl in diesem Fall die Relation (M3) trivial ist. Tatsächlich sind $K_i^{(0)}F$ $(i \in \mathbb{N})$ die eigentlichen K-Gruppen von F, von Milnor eingeführt und mit K_iF bezeichnet, während man für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ durch (M3) erhält, dass

$$K_n^{(\ell)}F \;\cong\; K_nF/\ell\cdot K_nF\,.$$

Aus den Relationen (M1) und (M2) leitet man leicht folgendes ab (s. [**Mil70**]):

(M4) Es gilt auch $\{a_1,\ldots,a_n\} = 0$, falls $a_i + a_{i+1} = 0$ für ein $i < n$.

Die Relation (M2) heißt auch *Steinberg-Relation*. Für die Motivation dieser Definitionen (im Fall von $K_nF = K_n^{(0)}F$) verweise ich auf [**Mil70**].

Nach der Definition von $K_n^{(\ell)}F$ ist jedes Element dieser Gruppe als Summe von Symbolen darstellbar. Zu $\xi \in K_n^{(\ell)}F$ bezeichne nun $l(\xi)$ die kleinste Zahl $l \in \mathbb{N}$, für die ξ als Summe von l Symbolen geschrieben werden kann. Zu gegebenen n, ℓ definieren wir dann eine Invariante des Körpers F,

$$\lambda(K_n^{(\ell)}F) \;=\; \sup\{l(\xi) \mid \xi \in K_n^{(\ell)}F\} \;\in\; \mathbb{N}\cup\{\infty\}\,,$$

und bezeichnen sie als *Symbollänge von* $K_n^{(\ell)}F$. Es ist also dann $\lambda(K_n^{(\ell)}F) \leqslant 1$, wenn jedes Element von $K_n^{(\ell)}F$ selbst ein Symbol ist.

Für Körper F mit $\mathrm{char}(F) \neq 2$ spielen die Invarianten $\lambda(K_n^{(2)}F)$ bei der Untersuchung der *u-Invariante* $u(F)$ eine wichtige Rolle (s. [**Kah00**]). Z.B. ist für nicht-reelle Körper F die Bedingung $u(F) < \infty$ äquivalent damit, dass $\lambda(K_n^{(\ell)}F) < \infty$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. B. Kahn vermutet, dass dies schon dann der Fall ist, wenn nur $\lambda(K_2^{(2)}F) < \infty$ ist (s. [**Kah00**, Conjecture 1]).

Generell stellt sich die Frage, ob bei $n \geqslant 2$ aus der Endlichkeit von $\lambda(K_n^{(\ell)}F)$ auch schon die Endlichkeit von $\lambda(K_{n+1}^{(\ell)}F)$ folgt. Unbekannt ist weiter, ob bei $n \geqslant 2$ aus $\lambda(K_n^{(\ell)}F) \leqslant 1$ auch $\lambda(K_{n+1}^{(\ell)}F) \leqslant 1$ folgt. Im Fall $\ell = 2 \neq \mathrm{char}(F)$ wurde die zuletzt formulierte Implikation allerdings von Elman und Lam gezeigt

(s. [**EL72**]). Dass grundsätzlich der Wert von $\lambda(K_n^{(\ell)}F)$ auch Auskünfte über $K_m^{(\ell)}F$ für $m > n$ liefern kann, zeigt der folgende Satz.

***Satz 2.1* (Kahn).** *Seien $-1 \in F^{\times \ell}$ (z.B. ℓ ungerade) und $\lambda = \lambda(K_2^{(\ell)}F)$. Dann ist $K_m^{(\ell)}F = 0$ für $m \geqslant 2\lambda + 3$.*

Ursprünglich benutzte der Beweis dieses Satzes *dividierte Potenzen* im graduierten Ring $K_*^{(\ell)}F = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n^{(\ell)}F$ (s. [**Kah00**]). Ein alternativer Beweis lässt sich unter Verwendung von *virtuellen Formen* führen, welche im nächsten Abschnitt eingeführt werden (s. [**Bec04**]).

3. Die Gruppe der ℓ-Formen

Wir definieren zu $\ell \in \mathbb{N}$ eine Gruppe $G(F, \ell)$ über Erzeugende und Relationen. Die Gruppenoperation wird mit '+' notiert, wobei aber die Kommutativität nicht vorausgesetzt wird. Erzeugende der Gruppe sind Elemente der Gestalt $\langle a\rangle$ mit $a \in F^\times$. Weiter gelten folgende Relationen in $G(F, \ell)$:

(V1) Es ist $\langle a\rangle = \langle a'\rangle$, falls $\{a\} = \{a'\}$ in $K_1^{(\ell)}F$.
(V2) Es ist $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$, falls $\{ab\} = \{a'b'\}$ in $K_1^{(\ell)}F$ und $\{a, b\} = \{a', b'\}$ in $K_2^{(\ell)}F$.

Eine 'Summe' $\langle a_1\rangle + \cdots + \langle a_n\rangle$ notieren wir kurz mit $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ und nennen ein solches Element von $G(F, \ell)$ eine *ℓ-Form über F*. Wir bezeichnen mit 0 dass neutrale Element von $G(F, \ell)$ und schreiben $-\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ für das Inverse von $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. Sind $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in G(F, \ell)$, so schreiben wir $m \times \varphi$ für die m-fache Summe $\varphi + \cdots + \varphi$.

Motivation für die gegebenen Definitionen ist der Spezialfall $\ell = 2$. Ist nämlich F ein Körper mit Charakteristik verschieden von 2, so ist die Gruppe $G(F, 2)$ nichts anderes als die Witt-Grothendieck-Gruppe $\hat{W}(F)$ (ohne Berücksichtigung der multiplikativen Struktur dieses Ringes). Dies ergibt sich aus dem bekannten Kettenäquivalenzsatz von Witt (s. [**Lam80**, Ch. I, Sect. 5]). Dieser besagt, dass sich die Relationen zwischen quadratischen Formen über F aus den Identitäten zwischen Formen der Dimension 1 und 2 gewinnen lassen, bzw. äquivalent dazu, aus den Identitäten zwischen den 1-fachen und zwischen den 2-fachen Pfisterformen über F. Wie Elman und Lam gezeigt haben, entsprechen für $n \in \mathbb{N}$ die n-fachen Pfisterformen eineindeutig den Symbolen in $K_n^{(2)}F$ (s. [**EL72**]). Verwendet man letzteres für $n \leqslant 2$, so wird klar, dass (V1) und (V2) gerade die nötigen Relationen sind, um quadratische Formen über F zu beschreiben.

Sobald man den Fall $\ell = 2$ verlässt, ist die Gruppe $G(F,\ell)$ in der Regel nicht kommutativ. Wegen der Gleichheit $\{a,b\} = -\{b,a\}$ in $K_2^{(\ell)}F$ ist nämlich nur dann $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$, wenn $2 \cdot \{a,b\} = 0$ ist in $K_2^{(\ell)}F$. Einen teilweisen Ersatz für die Kommutativität gibt es jedoch:

Lemma 3.1. *Für $a,b \in F^\times$ gilt $\langle a,b\rangle = \langle b^{-1}, ab^2\rangle = \langle a^2b, a^{-1}\rangle$ in $G(F,\ell)$.*

Dies folgt aus Relation (V2) durch Rechnen in $K_2^{(\ell)}F$. Auch klar ist, dass die Formen $\langle 1\rangle$ und $\langle -1\rangle$ im Zentrum von $G(F,\ell)$ liegen, und dass $\langle a, -a^{-1}\rangle = \langle 1,-1\rangle$ ist. Man erhält daher:

Proposition 3.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1,\ldots,a_n \in F^\times$. In $G(F,\ell)$ gilt*

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle + \langle -a_n^{-1},\ldots,-a_1^{-1}\rangle = n \times \langle 1,-1\rangle\,.$$

Folgerung 3.3. *Jedes Element von $G(F,\ell)$ hat eine Darstellung der Form*

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \;-\; m \times \langle 1,-1\rangle\,,$$

mit geeigneten $m,n \in \mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_n \in F^\times$.

Für eine ℓ-Form $\varphi = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ definieren wir nun *Dimension* und *Determinante* als $\dim(\varphi) = n$ und $\det(\varphi) = (a_1\cdots a_n)F^{\times\ell} \in F^\times/F^{\times\ell}$. Hierdurch werden Gruppenhomomorphismen $\dim : G(F,\ell) \longrightarrow \mathbb{Z}$ und $\det : G(F,\ell) \longrightarrow F^\times/F^{\times\ell}$ festgelegt.

Ich erwähne zwei Ergebnisse in diesem Zusammenhang, ohne an dieser Stelle näher auf den Beweis einzugehen (s. [**Bec04**]).

Proposition 3.4. *Der Kern der Abbildung* $\det : G(F,\ell) \longrightarrow F^\times/F^{\times\ell}$ *ist im Zentrum von $G(F,\ell)$ enthalten.*

Satz 3.5. *Sei -1 eine ℓ-te Potenz in F (z.B. ℓ ungerade). Dann gilt für jedes Element $\varphi \in G(F,\ell)$ die Gleichheit $\ell \times \varphi = (\ell \cdot \dim(\varphi)\,) \times \langle 1\rangle$.*

Bei $\mathrm{char}(F) \neq 2$ hat man im Witt-Grothendieck-Ring $\hat{W}(F)$ durch die Potenzen des Fundamentalideales $\hat{I}F$ von $\hat{W}(F)$ eine absteigende Folge von Untergruppen gegeben. Lassen sich in der Gruppe $G(F,\ell)$ allgemein Untergruppen $G^n(F,\ell)$ ($n \in \mathbb{N}$) definieren, die im Spezialfall $\ell = 2 \neq \mathrm{char}(F)$, wo $G(F,\ell) = \hat{W}(F)$ ist, gerade die Gruppen $(\hat{I}F)^n$ ergeben? Zumindest für $n \leqslant 3$ ist dies tatsächlich möglich.

Es sei $G^1(F,\ell)$ der Kern der Dimensionsabbildung $\dim : G(F,\ell) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Weiter sei $G^2(F,\ell)$ der Kern des eingeschränkten Determinantenhomomorphismus' $\det|_{G^1(F,\ell)} : G^1(F,\ell) \longrightarrow F^\times/F^{\times\ell}$. Da beide Abbildungen surjektiv sind, erhält man

$$G(F,\ell)/G^1(F,\ell) \;\cong\; \mathbb{Z}\,,$$

$$G^1(F,\ell)/G^2(F,\ell) \;\cong\; F^\times/F^{\times\ell} \;\cong\; K_1^{(\ell)}F\,.$$

Eine vierdimensionale ℓ-Form der Gestalt $\langle 1,-a,-b,(ab)^{-1}\rangle$ $(a,b\in F^\times)$ bezeichnen wir ab jetzt auch mit $\langle\langle a,b\rangle\rangle$. Diese Definition ist durch die Gestalt von 2-fachen Pfisterformen angeregt.

In der Theorie der quadratischen Formen bezeichnet man ein Tensorprodukt $\langle 1,-a_1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle 1,-a_n\rangle$ als *n-fache Pfisterform* und schreibt dafür auch $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle$. Für 2-fache Pfisterformen erhält man dann gerade die Gleichheit $\langle\langle a,b\rangle\rangle = \langle 1,-a,-b,(ab)^{-1}\rangle$. Es steht zu bezweifeln, ob sich der Begriff der n-fachen Pfisterform auch für $n\neq 2$ sinnvoll auf ℓ-Formen übertragen lässt, da in $G(F,\ell)$ ja keine Multiplikation zur Verfügung steht.

Satz 3.6. *Die Gruppe $G^2(F,\ell)$ wird erzeugt von den Elementen der Gestalt $\langle\langle a,b\rangle\rangle-\langle\langle 1,1\rangle\rangle$ mit $a,b\in F^\times$.*

Wie aber kann nun $G^3(F,\ell)$ sinnvoll definiert werden?

4. Stiefel-Whitney-Klassen

Um ℓ-Formen für Berechnungen in den K-Gruppen $K_n^{(\ell)}F$ anwendbar zu machen, führe ich nun Abbildungen $w_n : G(F,\ell)\longrightarrow K_n^{(\ell)}F$ $(n\in\mathbb{N})$ ein, die Delzants Definition der Stiefel-Whitney-Klassen (s. [**Del62**]) verallgemeinern.

Der graduierte Ring $K_*^{(\ell)}F=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}K_n^{(\ell)}F$ bettet sich in natürlicher Weise in den Ring $K_\Pi^{(\ell)}F=\prod_{n\in\mathbb{N}}K_n^{(\ell)}F$ ein, worin dieselbe Multiplikation definiert ist. Diese Einbettung entspricht in gewisser Weise dem Übergang vom Polynomring $F[X]$ zum Potenzreihenring $F[\![X]\!]$ über einem Körper F. Es sei darauf hingewiesen, dass bei $\ell\neq 2$ die Multiplikation in beiden Ringen in der Regel nicht kommutativ ist.

Wir bezeichnen im Weiteren mit $U(F,\ell)$ die Gruppe der Einheiten im Ring $K_\Pi^{(\ell)}F$. Diese Gruppe enthält unter anderem die Elemente $1+\{a\}$ mit $a\in F^\times$. Sei $U^1(F,\ell)$ die von den Elementen dieser einfachen Gestalt erzeugte Untergruppe von $U(F,\ell)$. Durch Vergleich der Relationen in $G(F,\ell)$ und in $K_\Pi^{(\ell)}F$ wird klar, dass die Zuordnung $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\longmapsto(1+\{a_1\})\cdots(1+\{a_n\})$ einen Homomorphismus

$$w : G(F,\ell)\;\longrightarrow\;U^1(F,\ell)$$

in eindeutiger Weise festlegt. Da $U^1(F,\ell)\subset K_\Pi^{(\ell)}F$ ist, hat man damit auch Abbildungen

$$w_n : G(F,\ell)\longrightarrow K_n^{(\ell)}F \qquad (n\in\mathbb{N})\,,$$

welche gemeinsam die Bedingung erfüllen, dass in $K_{\Pi}^{(\ell)}F$ die Gleichheit

$$w(\xi) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n(\xi)$$

für alle $\xi \in G(F,\ell)$ gilt. Hierbei ist offenbar w_0 die konstante Funktion mit Wert $1 \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = K_0^{(\ell)}F$. Weiter bringt die natürliche Identifikation von $K_1^{(\ell)}F$ mit $F^\times/F^{\times\ell}$ die Abbildung w_1 mit dem Homomorphismus $\det : G(F,\ell) \longrightarrow F^\times/F^{\times\ell}$ in Einklang.

Für den Fall $\ell = 2 \neq \mathrm{char}(F)$, wo $G(F,\ell) = \hat{W}(F)$ ist, wurden die Abbildungen w_n ($n \in \mathbb{N}$) in [**Del62**] und in [**Mil70**] untersucht und als *Stiefel-Whitney-Klassen* bezeichnet.

Proposition 4.1. *Für $\xi, \zeta \in G(F,\ell)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$w_n(\xi+\zeta) \;=\; \sum_{k=0}^{n} w_k(\xi)\cdot w_{n-k}(\zeta)\,.$$

Für $n > 1$ ist die Abbildung w_n im Allgemeinen kein Homomorphismus. Allerdings ergibt sich aus der Proposition:

Folgerung 4.2. *Die Einschränkung $w_2|_{G^2} : G^2(F,\ell) \longrightarrow K_2^{(\ell)}F$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, der das Element $\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 1,1\rangle\!\rangle$, mit $a,b \in F^\times$, in das Symbol $\{a,b\}$ überführt.*

Wir definieren nun $G^3(F,\ell)$ als den Kern von $w_2|_{G^2} : G^2(F,\ell) \longrightarrow K_2^{(\ell)}F$. Wir haben damit insbesondere $G^2(F,\ell)/G^3(F,\ell) \cong K_2^{(\ell)}F$. Auch für $G^3(F,\ell)$ kann ein Erzeugendensystem angegeben werden:

Satz 4.3. *Die Gruppe $G^3(F,\ell)$ wird erzeugt von den Elementen der Gestalt $\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle + \langle\!\langle a,c\rangle\!\rangle - \langle\!\langle a,bc\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 1,1\rangle\!\rangle$, mit $a,b,c \in F^\times$.*

Es stellt sich nun die Frage, ob es einen natürlichen Gruppenhomomorphismus $G_3(F,\ell) \longrightarrow K_3^{(\ell)}F$ gibt, der surjektiv ist, so dass sich wiederum eine Untergruppe $G^4(F,\ell)$ als dessen Kern definieren ließe.

Vermutung 4.4. *Ist $K_3^{(\ell)}F = 0$, so ist $w : G(F,\ell) \longrightarrow U^1(F,\ell)$ ein Isomorphismus und $G^3(F,\ell) = 0$.*

Die Nützlichkeit von ℓ-Formen und deren Stiefel-Whitney-Klassen beruht auf der Tatsache, dass sich jedes Symbol $\{a_1,\dots,a_n\}$ in $K_n^{(\ell)}F$ als Bild einer ℓ-Form $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ unter w_n auffassen lässt. Damit ist $K_n^{(\ell)}F$ trivial, falls w_n die Nullabbildung ist.

Falls ferner die obige Vermutung bestätigt werden kann, so ließe dies neue Methoden beim Studium von Körpern F von kohomologischer Dimension 2 erhoffen. Für solche F gilt nämlich $K_3^{(\ell)}F = 0$, sofern ℓ nicht von $\mathrm{char}(F)$ geteilt wird. Beispiele für solche Körper sind Funktionenkörper algebraischer Flächen über $\mathbb{C}$. Antworten zu diversen offenen Fragen über die K-Theorie bzw. die Brauer-Gruppen solcher Körper scheinen dadurch näher gerückt.

References

[Bec04] K. Becher – Virtual forms, 2004, preprint.

[Del62] A. Delzant – Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2, *C. R. Acad. Sci. Paris* **255** (1962), 1366–1368.

[EL72] R. Elman & T. Y. Lam – Pfister forms and K-theory of fields, *J. Algebra* **23** (1972), 181–213.

[Kah00] B. Kahn – Comparison of some field invariants, *J. Algebra* **232** (2000), no. 2, 485–492.

[Lam80] T. Y. Lam – *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1980, Revised second printing, Mathematics Lecture Note Series.

[Mil70] J. Milnor – Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1969/1970), 318–344.

[Sch85] W. Scharlau – *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 151–155
Universität Göttingen, 2003-04

WELL-POSEDNESS OF KDV ON $H^{-1}(\mathbb{T})$

T. Kappeler

P. Topalov

University of Zurich, Institute for Mathematics, CH-8057 Zurich, Switzerland
E-mail : tk@math.unizh.ch

Abstract. We survey recent progress in the study of analytic properties of solutions of the KdV equation.

1. Generalities

Let us consider the Initial Value Problem (IVP) for the Korteweg-deVries equation on the circle

$$\begin{aligned} v_t &= -v_{xxx} + 6vv_x \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ v\Big|_{t=0} &= q \in H^\alpha(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

This problem has been studied extensively. In particular it is known that for $q \in C^\infty(\mathbb{T})$, the (IVP) admits a unique solution $\mathscr{S}(t,q)$ which exists for all times (see [**BS75**]). Our aim is to solve the (IVP) for very rough initial data such as distributions in the Sobolev space $H^{-1}(\mathbb{T})$.

January 12th, 2004.

We say that a continuous curve $\gamma : [T_1, T_2] \to H^\alpha(\mathbb{T})$ with $T_1 < 0 < T_2, \gamma(0) = q$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ is a solution of (IVP) if for any $T_1 < t < T_2$ and for any sequence $(q_k)_{k\geqslant 1} \subseteq C^\infty(\mathbb{T})$ with $q = \lim_{k\to\infty} q_k$ in $H^\alpha(\mathbb{T})$, the solutions $\mathscr{S}(\cdot, q_k)$ have the property that $\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \mathscr{S}(t, q_k)$ in $H^\alpha(\mathbb{T})$. It then follows from the definition of a solution of (IVP) that it is unique whenever it exists. If the solution of (IVP) exists, we denote it by $\mathscr{S}(t, q)$.

The above (IVP) is said to be globally [uniformly] C^0-wellposed on $H^\alpha(\mathbb{T})$ if for any $q \in H^\alpha(\mathbb{T})$ the solution $\mathscr{S}(t, q)$ exists globally in time and the solution map $\mathscr{S}$ is continuous [uniformly continuous on bounded sets] as a map $\mathscr{S} : H^\alpha(\mathbb{T}) \to C^0(\mathbb{R}, H^\alpha(\mathbb{T}))$.

2. Results

Theorem 1. [**KT03a**] *KdV is globally C^0-wellposed on $H^\alpha(\mathbb{T})$ for any $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$.*

Remark 2.

(1) Theorem 1 improves in particular on earlier results of [**Bou93**], [**Bou97**], [**KPV96**], [**CKS$^+$03**]. Using earlier results, it is proved in [**CKS$^+$03**] that KdV is globally uniformly C^0-wellposed on $H_0^\alpha(\mathbb{T})$ for any $\alpha \geqslant -1/2$.

(2) In [**CCT03**] it is shown that KdV is *not* uniformly C^0-wellposed on $H_0^\alpha(\mathbb{T})$ for $-2 < \alpha < -1/2$ where $H_0^\alpha(\mathbb{T}) = \{q \in H^\alpha(\mathbb{T}) \,\big|\, \int_{\mathbb{T}} q = 0\}$. See also [**Bou97**].

The following theorem states that well known features [**MT76**] of solutions of (IVP) for smooth initial data continue to hold for rough initial data.

Theorem 3. [**KT03a**] *For any $q \in H^\alpha(\mathbb{T})$ with $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$, the solution of (IVP) has the following properties:*

(i) *the orbit $t \mapsto \mathscr{S}(t, q)$ is relatively compact.*

(ii) *$t \mapsto \mathscr{S}(t, q)$ is almost periodic.*

Theorem 1 and Theorem 3 can be applied to obtain corresponding results for the IVP of the modified KdV (mKdV)

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} + 6u^2 u_x \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T} \\ u\big|_{t=0} &= r \in H^\alpha(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Theorem 4. [**KT03b**] *mKdV is globally C^0-wellposed on $H^\alpha(\mathbb{T})$ for* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Remark 5.

(1) Theorem 4 improves on earlier results of [**Bou93**], [**KPV96**], [**CKS$^+$03**]. Using earlier results it is proved in [**CKS$^+$03**] that mKdV is globally uniformly C^0-wellposed on $H^\alpha(\mathbb{T})$ for any $\alpha \geqslant 1/2$.

(2) In [**CCT03**] it is shown that mKdV is *not* uniformly C^0-wellposed on $H_0^\alpha(\mathbb{T})$ for $-1 < \alpha < 1/2$. See also [**Bou97**].

Besides Theorem 1, the main ingredient of the proof of Theorem 4 is the following result on the Miura map, $B : L^2(\mathbb{T}) \to H^{-1}(\mathbb{T}), r \mapsto r_x + r^2$, first introduced by Miura [**Miu68**] and proved to be a Bäcklund transformation, mapping solutions of mKdV to solutions of KdV.

Theorem 6. [**KT03b**]

(i) *For any $\alpha \geqslant 0$, the Miura map $B : H^\alpha(\mathbb{T}) \to H^{\alpha-1}(\mathbb{T})$ is a global fold.*

(ii) *Restricted to $H_0^\alpha(\mathbb{T})$, B is a real analytic isomorphism onto the real analytic submanifold $H_0^{\alpha-1}(\mathbb{T}) := \{q \in H^{\alpha-1}(\mathbb{T}) \,|\, \lambda_0(q) = 0\}$ where $\lambda_0(q)$ denotes the lowest eigenvalue in the periodic spectrum of the operator $-d^2/dx^2 + q$.*

Remark 7. Theorem 6 is based on earlier results on the Riccati map [**KT03c**]. Some of the results in [**KT03c**] have been obtained simultaneously (but with different, more complicated proofs) by [**Kor02**].

The main ingredient in the proof of Theorem 1 is a result on the normal form of the Korteweg-deVries equation considered as an integrable Hamiltonian system. To formulate it, introduce the following model spaces ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$h^\alpha := \{(x_k, y_k)_{k\geqslant 1} \,|\, x_k, y_k \in \mathbb{R};\ \sum_{k\geqslant 1} k^{2\alpha}(x_k^2 + y_k^2) < \infty\}$$

with the standard Poisson bracket where $\{x_k, y_k\} = 1 = -\{y_k, x_k\}$ and all other brackets between the coordinate functions vanish.

On the space $H_0^\alpha(\mathbb{T}) := \{q = \sum_{k\neq 0} \hat{q}_k e^{2\pi i k x} \,|\, q \in H^\alpha(\mathbb{T})\}$ we consider the Poisson bracket introduced by Gardner and, independently, by Faddeev and Zakharov

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial F}{\partial q(x)} \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial q(x)} dx.$$

Theorem 8. [**KP03**], [**KMT03**] *There exists a real analytic diffeomorphism* $\Omega : H_0^{-1}(\mathbb{T}) \to h^{-1/2}$ *so that*

(i) Ω *preserves the Poisson bracket;*

(ii) *for any* $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$*, the restriction* Ω_α *of* Ω *to* $H_0^\alpha(\mathbb{T})$ *is a real analytic isomorphism,* $\Omega_\alpha : H_0^\alpha(\mathbb{T}) \to h^{\alpha+1/2}$*;*

(iii) *on* $H_0^1(\mathbb{T})$*, the KdV Hamiltonian* $\mathscr{H}(q) = \int_{\mathbb{T}}(\frac{1}{2}q_x^2 + q^3)dx$*, when expressed in the new coordinates* $(x_k, y_k)_{k\geqslant 1}$*, is a real analytic function of the actions* $I_k := (x_k^2 + y_k^2)/2$ $(k \geqslant 1)$ *alone.*

Remark 9. In [**KP03**] it is shown that $\Omega_0 : L_0^2 \to h^{1/2}$ is a real analytic isomorphism with properties (i) and (iii). Moreover it is proved that for any $\alpha \in \mathbb{N}$, the restriction Ω_α of Ω to $H_0^\alpha(\mathbb{T})$ is a real analytic isomorphism, $\Omega_\alpha : H_0^\alpha(\mathbb{T}) \to h^{\alpha+1/2}$. This result has been extended in [**KMT03**] as formulated in Theorem 8.

References

[Bou93] J. Bourgain – Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 3, 209–262.

[Bou97] ______, Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data, *Selecta Math. (N.S.)* **3** (1997), no. 2, 115–159.

[BS75] J. L. Bona & R. Smith – The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **278** (1975), no. 1287, 555–601.

[CCT03] M. Christ, J. Colliander & T. Tao – Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations, *Amer. J. Math.* **125** (2003), no. 6, 1235–1293.

[CKS+03] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka & T. Tao – Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 3, 705–749.

[KMT03] T. Kappeler, C. Möhr & P. Topalov – Birkhoff coordinates for KdV on phase spaces of distributions, 2003, Preprint Series, Institute of Mathematics, University of Zurich.

[Kor02] E. Korotyaev – Characterization of spectrum for Schrödinger operator with periodic distributions, 2002, Preprint.

[KP03] T. Kappeler & J. Pöschel – *KdV & KAM*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 45, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[KPV96] C. E. Kenig, G. Ponce & L. Vega – A bilinear estimate with applications to the KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 2, 573–603.

[KT03a] T. Kappeler & P. Topalov – Global well-posedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, 2003, Preprint Series, Institute of Mathematics, University of Zurich.

[KT03b] ______, Global well-posedness of mKdV in $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, 2003, Preprint Series, Institute of Mathematics, University of Zurich.

[KT03c] ______, Riccati representation for elements in $H^{-1}(\mathbb{T}^1)$ and its applications, 2003, Preprint Series, Institute of Mathematics, University of Zurich, abridged version in Pliska Stud. Math., **15**(2003).

[Miu68] R. M. Miura – Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Mathematical Phys.* **9** (1968), 1202–1204.

[MT76] H. P. McKean & E. Trubowitz – Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), no. 2, 143–226.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 157–166
Universität Göttingen, 2003-04

HOLOMORPHE ABBILDUNGEN AUF MANNIGFALTIGKEITEN MIT NICHT-NEGATIVER KODAIRA-DIMENSION

S. Kebekus
Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, D-50931 Köln, Germany • *E-mail :* stefan.kebekus@math.uni-koeln.de

Abstract. We describe the structure of the space of holomorphic surjections onto varieties of non-negative Kodaira dimension (joint with J. M. Hwang and T. Peternell).

1. Einführung

Es sei $f : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen normalen komplex-projektiven Varietäten. Ein klassisches Problem der komplexen Geometrie fragt nach Kriterien für die (nicht-)Existenz von Deformationen des Morphismus f, wobei die Varietäten X und Y festgehalten werden. Allgemeiner fragt man nach einer Beschreibung der Zusammenhangskomponente $\mathrm{Hom}_f(X, Y) \subset \mathrm{Hom}(X, Y)$ des Raumes der holomorphen Abbildungen.

Ein bekanntes Ergebnis in dieser Richtung sagt etwa, daß die Automorphismengruppe einer komplexen Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Typ diskret ist. Allgemeiner gilt, daß surjektive Morphismen zwischen projektiven Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ stets infinitesimal starr sind, daß die betreffenden Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ also reduzierte Punkte sind. Ähnliche Fragen wurden im komplex-analytischen Zusammenhang von Borel und Narasimhan [**BN67**] untersucht.

Ich möchte in diesem Seminarbeitrag über eine gemeinsame Arbeit [**HKP03**] mit Jun-Muk Hwang und Thomas Peternell berichten, in der wir diese klassischen Resultate verallgemeinern und den Raum der surjektiven Morphismen für eine große Klasse von Mannigfaltigkeiten vollständig beschreiben. Die vorliegende Ausarbeitung enthält keine neuen Ergebnisse, stellt die Beweisidee aber in größerer Ausführlichkeit als in [**HKP03**] dar.

2. Formulierung des Ergebnisses

Ein surjektiver Morphismus $f : X \to Y$ hat auf jeden Fall dann Deformationen, wenn die Zielvarietät Y eine positiv-dimensionale Automorphismengruppe hat, denn die Kompositionsabbildung

$$
\begin{array}{rccc} f^\circ : & \mathrm{Aut}^0(Y) & \to & \mathrm{Hom}_f(X,Y) \\ & g & \mapsto & g \circ f \end{array} \tag{1}
$$

ist offenbar injektiv. Die naive Vermutung, daß alle Deformationen von f von Automorphismen der Zielvarietät kommen, ist natürlich falsch. Das Hauptresultat der Arbeit zeigt aber, daß die Vermutung *fast* richtig ist, wenn die Zielvarietät nicht von rationalen Kurven überdeckt ist: die Abbildung f faktorisiert stets über eine Zwischenvarietät Z, deren Automorphismengruppe alle Deformationen induziert. Die korrekte Formulierung des Resultates lautet wie folgt:

Satz 2.1 **(Hwang-Kebekus-Peternell [HKP03]).** *Es sei $f : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen normalen komplex-projektiven Varietäten, und Y sei nicht von rationalen Kurven überdeckt. Dann gibt es eine Faktorisierung von f,*

$$
\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd},
$$

so daß gilt:

1. *Der Morphismus β ist außerhalb der Singularitäten von X und Y unverzweigt, und*
2. *die natürliche Abbildung*

$$
\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}^0(Z)\big/\mathrm{Deck}(Z/Y) & \to & \mathrm{Hom}_f(X,Y) \\ g & \mapsto & \beta \circ g \circ \alpha \end{array}
$$

ist ein Isomorphismus.

Insbesondere folgt, daß alle surjektiven Morphismen nach Y unobstruiert deformieren, und daß die zugehörigen Komponenten von $\mathrm{Hom}(X,Y)$ *glatte Abelsche Varietäten sind.*

Als Korollar, das wir hier nicht beweisen, halten wir noch fest:

***Korollar 2.2* (Hwang-Kebekus-Peternell [HKP03])**
Wenn unter den Voraussetzungen des Theorems 2.1 die Zielvarietät Y noch glatt ist, dann besitzt Y eine endliche, unverzweigte Überlagerung der Form $T \times W$, wobei T ein Torus der Dimension $\dim T = h^0(X, f^*(T_Y))$ *ist. Zusätzlich gilt:*

$$\dim \mathrm{Hom}_f(X,Y) \leqslant \dim Y - \kappa(Y),$$

wobei $\kappa(Y)$ die Kodairasche Dimension bezeichnet. □

Nicht ganz präzise, aber vielleicht einfacher zu merken, fassen wir die Ergebnisse der Arbeit so zusammen:

- Deformationen von surjektiven Morphismen sind stets unobstruiert, es sei denn, es gibt einen klaren geometrischen Grund: die Zielvarietät ist von rationalen Kurven überdeckt.
- Wenn das Ziel nicht mit rationalen Kurven überdeckt ist, kommen alle Deformationen von Automorphismen von einer Zwischenvarietät.

3. Bekannte Tatsachen

Des Beweis des Satzes 2.1 verwendet eine Reihe von bekannten Tatsachen, die wir der Bequemlichkeit halber hier noch einmal zusammengestellt haben.

Der Tangentialraum des Hom-Schemas. Die universelle Eigenschaft des Raumes der Morphismen liefert eine kanonische Identifikation des Zariski-Tangentialraumes $T_{\mathrm{Hom}}|_f$ von $\mathrm{Hom}(X,Y)$ an der Stelle f mit dem Vektorraum $H^0(X, f^*(T_Y))$, siehe [**Kol96**, I. thm. 2.16].

Notation 3.1. *Die Elemente von $H^0(X, f^*(T_Y))$ bezeichnet man als "infinitesimale Deformationen von f". Man nennt den Morphismus f "infinitesimal starr" wenn $h^0(X, f^*(T_Y)) = 0$ ist.*

Beschreibung von Überlagerungen durch Garben. In diesem Abschnitt sei $f : X \to Y$ eine (möglicherweise verzweigte) Überlagerung von komplexen Mannigfaltigkeiten. Dann ist bekannt, daß die Garbe $f_*(\mathscr{O}_X)$ von $\mathscr{O}_Y$-Algebren ein Vektorbündel auf Y liefert, [**Har77**, III chapt. 9]. Weiter gilt: $X \cong \mathbf{Spec}(f_*(\mathscr{O}_X))$.

Wenn Z eine Zwischenvarietät ist, über die f faktorisiert,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd},$$

dann ist $b_*(\mathscr{O}_Z)$ eine kohärente Unteralgebra von $f_*(\mathscr{O}_X)$. Anders herum gehört zu jeder kohärenten Untergarbe von $\mathscr{O}_Y$-Moduln $\mathscr{F} \subset f_*(\mathscr{O}_X)$, die abgeschlossen unter der Multiplikation

$$\mu : f_*(\mathscr{O}_X) \otimes f_*(\mathscr{O}_X) \to f_*(\mathscr{O}_X)$$

ist, eine Zwischenvarietät $Z := \mathbf{Spec}(\mathscr{F})$ über die die Abbildung f faktorisiert, so daß $\mathscr{F} \cong b_*(\mathscr{O}_Z)$ ist, [**Har77**, II. ex. 5.17].

Wenn die Garbe $\mathscr{F}$ zusätzlich noch lokal frei ist, und ihre Einschränkung auf jeder allgemeine Kurve in Y Grad 0 hat, dann ist Z eine Mannigfaltigkeit, und die Abbildung $b : Z \to Y$ ist unverzweigt, [**PS00**, lem. 1.13].

Die Harder-Narasimhan-Filtrierung. In diesem Abschnitt sei Y eine komplex-projektive Mannigfaltigkeit, $\mathscr{E}$ eine kohärente Garbe auf Y und $H \in \operatorname{Pic}(Y)$ ein amples Geradenbündel. Alle Resultate gelten auch für normale Kähler-Varietäten, aber wir benötigen diesen Grad von Allgemeinheit hier nicht.

Definition 3.2. *Die Zahl*

$$\mu_H(\mathscr{E}) := \frac{c_1(\mathscr{E}) \cdot H^{\dim(Y)-1}}{\operatorname{Rang}(\mathscr{E})}$$

nennt man die "Steigung von $\mathscr{E}$ bezüglich H". Die kohärente Garbe $\mathscr{E}$ heißt "semistabil bezüglich H", wenn für jede kohärente Untergarbe $\mathscr{G} \subset \mathscr{E}$ die Ungleichung

$$\mu_H(\mathscr{G}) \leqslant \mu_H(\mathscr{E})$$

gilt.

Satz 3.3 **(Harder-Narasimhan [HN75]).** *Es gibt eine eindeutige Filtrierung der Garbe $\mathscr{E}$ durch kohärente Untergarben*

$$0 = \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{E}_{s-1} \subset \mathscr{E}_s = \mathscr{E},$$

so daß alle Quotienten ${}^{\mathscr{E}_i}/_{\mathscr{E}_{i-1}}$ stabil bezüglich H sind, und so, daß

$$\mu_H\left({}^{\mathscr{E}_1}/_{\mathscr{E}_0}\right) > \cdots > \mu_H\left({}^{\mathscr{E}}/_{\mathscr{E}_{s-1}}\right)$$

gilt. ∎

Eines der wesentlichen Resultate über die Harder-Narasimhan-Filtrierung vergleicht die Filtrierung einer kohärenten Garbe $\mathscr{E}$ auf X mit der Filtrierung der Einschränkung $\mathscr{E}|_C$ von $\mathscr{E}$ auf eine hinreichend allgemeine Kurve $C \subset Y$.

***Satz 3.4* (Mehta-Ramanathan [MR82]).** *Es sei $\mathscr{E}_i$ die Harder-Narasimhan-Filtrierung einer kohärenten Garbe $\mathscr{E}$ auf X. Wenn $n_1, \dots, n_{\dim X - 1}$ hinreichend große Zahlen sind, und $C \subset X$ eine glatte Kurve, die als schementheoretischer Durchschnitt allgemeiner Divisoren $D_i \in |n_i H|$ entsteht, dann ist die Einschränkung der Harder-Narasimhan-Filtrierung,*

$$0 = \mathscr{E}_0|_C \subset \mathscr{E}_1|_C \subset \cdots \subset \mathscr{E}_{s-1}|_C \subset \mathscr{E}_s|_C = \mathscr{E}|_C$$

exakt die Harder-Narasimhan-Filtrierung der eingeschränkten Garbe $\mathscr{E}|_C$. □

Positivitätsbegriffe für Vektorbündel. In diesem Abschnitt sei $\mathscr{E}$ ein Vektorbündel auf einer komplex-projektiven Mannigfaltigkeit Y. Weiter sei $Y := \mathbb{P}(\mathscr{E})$ das zugehörige Bündel von projektiven Räumen und $\mathscr{L} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(1) \in \mathrm{Pic}(Y)$ das tautologische Geradenbündel.

Definition 3.5. *Man nennt $\mathscr{E}$ ample beziehungsweise nef, wenn $\mathscr{L}$ ample beziehungsweise nef ist.*

Beispiel 3.6. *Sei $Y = \mathbb{P}_1$ und*

$$\mathscr{E} = \bigoplus_{i=1\ldots n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(a_i).$$

Dann ist $\mathscr{E}$ genau dann ample, wenn für alle i gilt, daß $a_i > 0$ ist. Das Bündel $\mathscr{E}$ genau dann nef, wenn alle $a_i \geqslant 0$ sind.

Ample und nefe Vektorbündel werden in [**Har66**], [**Har70**] und [**DPS94**] ausführlich diskutiert. Wir stellen hier die für uns wesentlichen Ergebnisse zusammen.

Fakt 3.7. *Quotienten von amplen Vektorbündeln sind ample* [**Har70**, prop. 1.7]. *Quotienten von nefen Vektorbündeln sind nef* [**DPS94**, prop. 1.15(i)]. □

Fakt 3.8. *Sei Y eine glatte Kurve. Dann gilt:*

1. *Ample Vektorbündel haben positiven Grad. Nefe Vektorbündel haben nicht-negativen Grad* [**DPS94**, prop. 1.14].
2. *Wenn das Vektorbündel $\mathscr{E}$ nef ist und Grad 0 hat, dann ist auch das duale Bündel $\mathscr{E}^*$ nef* [**DPS94**, prop. 1.15(iii)].

3. *Wenn das Vektorbündel $\mathscr{E}$ nef, aber nicht ample ist, dann existiert ein amples Unterbündel $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$, so daß der Quotient $\mathscr{E}/\mathscr{V}$ nef ist und Grad 0 hat. Das Bündel $\mathscr{V}$ ist maximal in dem Sinne, daß jedes ample Unterbündel $\mathscr{V}' \subset \mathscr{E}$ in $\mathscr{V}$ enthalten ist,* [**PS00**, lem. 2.3] □

Fakt 3.9. *In der Situation von Fakt 3.8.3. zeigt eine elementare Rechnung folgendes: wenn $H \in \mathrm{Pic}(Y)$ ein amples Geradenbündel ist, dann tritt das maximale ample Unterbündel $\mathscr{V}$ in der Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathscr{E}$ bezüglich H auf.*

4. Beweisidee

Schritt 1: Vereinfachende Annahme. Weil wir hier nur die Kernidee des Beweises zeigen wollen, nehmen wir vereinfachend an, daß der surjektive Morphismus $f : X \to Y$ eine endliche, aber möglicherweise verzweigte, Überlagerung von komplex-projektiven Mannigfaltigkeiten ist.

Schritt 2: Die Tangentialabbildung von f°. Wir betrachten noch einmal die natürliche Abbildung $f^\circ : \mathrm{Aut}^0(Y) \to \mathrm{Hom}_f(X, Y)$, die auf Seite 158 in (1) definiert wurde. Die universellen Eigenschaften des Raumes der Morphismen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ und der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}^0(Y)$ liefern die folgende Beschreibung der Tangentialabbildung von f° an der Stelle $e \in \mathrm{Aut}^0(Y)$,

$$Tf^\circ|_e : T_{\mathrm{Aut}(Y)}|_e \to T_{\mathrm{Hom}}|_f. \tag{2}$$

Unter den natürlichen Identifikationen

$$T_{\mathrm{Aut}(Y)}|_e \cong H^0(Y, T_Y) \quad \text{und} \quad T_{\mathrm{Hom}}|_f \cong H^0(X, f^*(T_Y))$$

wird die Tangentialabbildung (2) zur Rückzugsabbildung

$$Tf^\circ|_e = f^* : H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*T_Y). \tag{3}$$

Fazit 4.1. *Die Abbildung* (2) *ist injektiv. Wenn die Rückzugsabbildung* (3) *surjektiv ist, wenn also jede infinitesimale Deformation von f von einem Vektorfeld auf Y kommt, dann liefert die Abbildung* (2) *einen Isomorphismus der Zariski-Tangentialräume.*

Die obigen Überlegungen geben auch eine Beschreibung der Tangentialabbildung an einem beliebigen Punkt $g \in \mathrm{Aut}^0(Y)$:

$$Tf^\circ|_g = (g \circ f)^* : H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, (g \circ f)^*(T_Y)).$$

Weil die Abbildung $g : Y \to Y$ aber überall maximal Rang hat, erkennen wir, daß der Rang der Tangentialabbildung Tf° auf ganz $\mathrm{Aut}^0(Y)$ konstant ist. Eine elementare Argumentation liefert dann das folgende Ergebnis.

Fazit 4.2. *Wenn die Rückzugsabbildung* (3) *surjektiv ist, dann ist die Kompositionsabbildung* $f^\circ : \mathrm{Aut}^0(Y) \to \mathrm{Hom}_f(X,Y)$ *isomorph. In diesem Fall ist der Beweis des Satzes 2.1 beendet, wenn wir* $Z := Y$ *setzen.*

Zentraler Schritt 3: Konstruktion einer Überlagerung. Nach den Überlegungen aus Schritt 2 können wir annehmen, daß es einen Schnitt $\sigma \in H^0(X, f^*(T_Y))$ gibt, der *nicht* von einem Vektorfeld auf Y kommt. Wir werden in diesem Abschnitt eine unverzweigte Überlagerung von Y bauen, die den surjektiven Morphismus f faktorisiert. Die wesentlichen Hilfsmittel dabei sind die folgende Negativitätsaussage von Lazarsfeld für das Vektorbündel $f_*(\mathscr{O}_X)$ und die Charakterisierung von unigeregelten Mannigfaltigkeiten von Miyaoka, die als konkurrierende Positivitätsaussage für $f_*(\mathscr{O}_X)$ gesehen werden kann.

Satz 4.3 **(Lazarsfeld [Laz80], [PS00, thm. A]).** *Die Spurabbildung* $tr : f_*(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y$ *liefert eine natürliche Spaltung*

$$f_*(\mathscr{O}_X) \cong \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}^*,$$

wobei das Vektorbündel $\mathscr{E}$ *die folgende Positivitätseigenschaft hat: Wenn* $C \subset Y$ *eine Kurve ist, die nicht im Verzweigungsort liegt, dann ist* $\mathscr{E}|_c$ *nef.* □

Die Projektionsformel liefert demnach eine Identifikation

$$H^0(X, f^*(T_Y)) = H(Y, f_*(f^*(T_Y))) = H^0(Y, T_Y) \oplus H^0(Y, \mathscr{E}^* \otimes T_Y)$$

Weil der Schnitt σ nicht in der Komponente $H^0(Y, T_Y)$ liegt, erhalten wir also eine nicht-triviale Abbildung $\sigma : \mathscr{E} \to T_Y$.

Satz 4.4 **(Miyaoka [Miy87], [Kol92, thm. 9.0.1]).** *Sei* $C \subset Y$ *eine Kurve, die als allgemeiner vollständiger Durchschnitt von sehr amplen Divisoren auftritt. Dann hat das Vektorbündel* $\mathrm{Bild}(\sigma)|_C$ *semi-negativen Grad. Insbesondere ist* $\mathscr{E}|_C$ *nicht ample.* □

Als Konsequenz halten wir Folgendes fest.

Fazit 4.5. *Sei* $H \in \mathrm{Pic}(Y)$ *ample und* $C \subset Y$ *eine allgemeine Kurve wie im Satz 3.4 von Mehta-Ramanathan. Dann ist das Vektorbündel* $\mathscr{E}|_C$ *nef, aber nicht ample.*

Notation 4.6. *Wir halten für den Rest des Beweises das ample Bündel* $H \in \mathrm{Pic}(Y)$ *fest. Sei* C *eine Kurve wie in Fazit 4.5, und* $\mathscr{V}_C \subset \mathscr{E}|_C$ *das —nach Fakt 3.8.3. existierende— maximale ample Unterbündel. Weiter sei* $\mathscr{F}_C \subset \mathscr{E}^*|_C$ *der Kern der Abbildung* $\mathscr{E}^*|_C \to \mathscr{V}_C^*$*. Man beachte, daß* $\mathscr{F}_C$ *dual zum Quotienten* $\mathscr{E}|_C \big/ \mathscr{F}_C$ *ist, also nach Fakt 3.8.2. wieder nef ist und Grad 0 hat.*

Mit diesem Vorbereitungen werden wir die gesuchte Faktorisierung jetzt zunächst über der Kurve C definieren, und dann schließlich auf ganz Y ausdehnen.

Beobachtung 4.7. *Das Untervektorbündel $\mathscr{O}_C \oplus \mathscr{F}_C \subset f_*(\mathscr{O}_x)|_C$ ist abgeschlossen unter der Multiplikationsabbildung*

$$\mu : f_*(\mathscr{O}_X) \otimes f_*(\mathscr{O}_X) \to f_*(\mathscr{O}_X),$$

denn die zugehörende Abbildung

$$\mu' : \underbrace{(\mathscr{O}_C \oplus \mathscr{F}_C) \oplus (\mathscr{O}_C \oplus \mathscr{F}_C)}_{\text{grad } 0,\text{nef}} \longrightarrow \underbrace{\mathscr{O}_C \oplus \mathscr{E}^*|_C \Big/ \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{F}_C}_{\cong \mathscr{V}_C^*,\ \textit{anti-ample}}$$

ist nach Fakt 3.7 notwendigerweise $= 0$.

Das Untervektorbündel $\mathscr{O}_C \oplus \mathscr{F}_C \subset f_*(\mathscr{O}_x)|_C$ liefert also eine Faktorisierung der eingeschränkten Abbildung $f|_C : f^{-1}(C) \to C$ über eine unverzweigte Überlagerung von C. Um nun diese Überlagerung von C auf ganz Y auszudehnen, genügt es, das maximal ample Unterbündel $\mathscr{V}_C \subset \mathscr{E}|_C$ derart zu einem Unterbündel $\mathscr{V} \subset \mathscr{E}$ auszudehnen, daß für jede Kurve C', die wie im Satz 3.4 als allgemeiner vollständiger Durchschnitt von sehr amplen Divisoren auftritt, die Einschränkung $\mathscr{V}|_{C'} \subset \mathscr{E}|_{C'}$ exakt das maximale ample Unterbündel von $\mathscr{E}|_{C'}$ ist. Das ist aber nach Fakt 3.9 immer möglich, weil das (eindeutige) maximale ample Unterbündel $\mathscr{V}_C \subset \mathscr{E}|_C$ ein Teil der (eindeutigen) Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathscr{E}|_C$ ist, die sich nach dem Satz 3.4 von Mehta-Ramanathan zur Harder-Narasimhan-Filtrierung von $\mathscr{E}$ auf ganz Y fortsetzt.

Fazit 4.8. *Wenn die Rückzugsabbildung $H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*(T_Y))$ nicht surjektiv ist, dann gibt es eine Faktorisierung von f,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Y^{(1)} \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd},$$

wobei β eine unverzweigte Überlagerung ist.

Schritt 4: Beweisende. Falls die Rückzugsabbildung $H^0(Y, T_Y) \to H^0(X, f^*(T_Y))$ nicht surjektiv ist, haben wir im Schritt 3 eine Faktorisierung von f über eine unverzweigte Überlagerung $\beta : Y^{(1)} \to Y$ konstruiert. Wegen der Unverzweigtheit gilt natürlich $f^*(T_Y) = \alpha^*(T_{Y^{(1)}})$.

Jetzt prüfen wir wieder, ob die Rückzugsabbildung

$$\alpha^* : H^0\left(Y^{(1)}, T_{Y^{(1)}}\right) \to H^0(X, f^*(T_Y))$$

surjektiv ist.

Falls Ja : Nach den Überlegungen aus Schritt 2, ist der Beweis beendet, indem wir $Z := Y^{(1)}$ setzen.

Falls Nein : Dann wiederholen wir Schritt 3 für die Abbildung $\alpha : X \to Y^{(1)}$ anstelle der Abbildung $f : X \to Y$.

Auf diese Weise konstruieren wir eine Folge von unverzweigten Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rrrrr, bend left, "f"] & Y^{(d)} \arrow[r] & Y^{(d-1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{(1)} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Dieser Prozess muss aber nach endlich vielen Schritten abbrechen, weil die Anzahl der Blätter der Abbildung f endlich ist. Das beendet den Beweis des Theorems 2.1 unter der vereinfachenden Annahme, daß f eine endliche Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten ist.

5. Offene Fragen

Der Beweis benutzt an zentraler Stelle die Charakterisierung unigeregelter Varietäten von Miyaoka. Der Satz von Miyaoka gilt aber nur für komplex-projektive Varietäten. Dennoch scheint es, als könnte der Satz 2.1 in allgemeineren Situationen richtig sein. Insbesondere fragen wir:

– Gilt der Satz 2.1 auch für projektive Varietäten, die über einem Körper positiver Charakteristik definiert sind?
– Gilt der Satz 2.1 auch für Kähler-Mannigfaltigkeiten oder Kählersche komplexe Räume?

Satz 2.1 kann auch so interpretiert werden: alle Obstruktionen zur Deformation von surjektiven Morphismen kommen von rationalen Kurven auf der Zielvarietät. Kann man diese Aussage präzisieren? Gibt es ein Analogon zu Satz 2.1 für Zielvarietäten, die unigeregelt, aber nicht rational zusammenhängend sind?

References

[BN67] A. Borel & R. Narasimhan – Uniqueness conditions for certain holomorphic mappings, *Invent. Math.* **2** (1967), 247–255.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell & M. Schneider – Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no. 2, 295–345.

[Har66] R. Hartshorne – Ample vector bundles, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **29** (1966), 63–94.

[Har70] R. Hartshorne – *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Har77] ______, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HKP03] J.-M. Hwang, S. Kebekus & T. Peternell – Holomorphic maps onto varieties of non-negative Kodaira dimension, Preprint math.AG/0307220, Juli 2003.

[HN75] G. Harder & M. S. Narasimhan – On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, *Math. Ann.* **212** (1974/75), 215–248.

[Kol92] J. Kollár (ed.) – *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Société Mathématique de France, Paris, 1992, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991, Astérisque No. 211 (1992).

[Kol96] ______, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Laz80] R. Lazarsfeld – A Barth-type theorem for branched coverings of projective space, *Math. Ann.* **249** (1980), no. 2, 153–162.

[Miy87] Y. Miyaoka – The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, 449–476.

[MR82] V. B. Mehta & A. Ramanathan – Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves, *Math. Ann.* **258** (1981/82), no. 3, 213–224.

[PS00] T. Peternell & A. J. Sommese – Ample vector bundles and branched coverings, *Comm. Algebra* **28** (2000), no. 12, 5573–5599, With an appendix by Robert Lazarsfeld, Special issue in honor of Robin Hartshorne.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 167–174
Universität Göttingen, 2003-04

DIE GLEICHUNG $x^2 + y^3 = z^7$

M. Stoll
International University Bremen, Campus Ring 1, 28759 Bremen, Germany
E-mail : m.stoll@iu-bremen.de

Abstract. Die Gleichung im Titel ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Fermatschen Gleichung $x^p + y^q = z^r$, wobei man sich für primitive (d.h. teilerfremde) ganzzahlige Lösungen interessiert. Einem Ergebnis von Darmon und Granville zufolge gibt es nur endlich viele solche Lösungen, wenn $1/p + 1/q + 1/r < 1$ ist. In Zusammenarbeit mit Bjorn Poonen (UC Berkeley) und Ed Schaefer (Santa Clara) ist es mir kürzlich gelungen zu zeigen, dass die Liste bekannter Lösungen im Fall $(p, q, r) = (2, 3, 7)$ vollständig ist. Das Problem wird dabei reduziert auf die Bestimmung der Menge der rationalen Punkte auf einer Reihe von Kurven vom Geschlecht 3, wobei wir bei der Aufstellung der Liste von Kurven Überlegungen verwenden, wie sie auch im Beweis der Fermatschen Vermutung vorkommen. Die Bestimmung der rationalen Punkte erfordert die Berechnung des Mordell-Weil-Ranges der Jacobischen unserer Kurven; wir haben dafür Descent-Methoden verallgemeinert. Für alle bis auf eine Kurve lässt sich dann Chabautys Methode anwenden, um die Punkte zu finden; bei der letzten Kurve war eine neue Idee erforderlich.

1. Verallgemeinerung der Fermatschen Gleichung

Ich berichte hier über eine gemeinsame Arbeit mit B. Poonen (Berkeley) und E. Schäfer (Santa Clara).

January 15th, 2004.

Wir alle kennen die Fermatsche Gleichung

$$\boxed{x^n + y^n = z^n\,.}$$

Der Satz von Wiles (und vielen Anderen) besagt: Es gibt keine *nichttrivialen ganzzahligen* Lösungen für $n \geq 3$. Betrachten wir die *Verallgemeinerte Fermatsche Gleichung:*

$$\boxed{x^p + y^q = z^r}$$

Hier sind p, q und r ganze Zahlen ≥ 2. Diese haben viele ganzzahlige Lösungen, zum Beispiel

$$\left(a^{11}\, b^7\, c^3\right)^2 + \left(a^7\, b^5\, c^2\right)^3 = \left(a^3\, b^2\, c\right)^7$$

sobald $a + b = c$ ist. Deshalb suchen wir nach *primitiven* Lösungen, d.h. Lösungen in *teilerfremden* ganzen Zahlen. Eine "Lösung" sei hier stets eine primitive nichttriviale ganzzahlige Lösung.

Sei $$\boxed{\chi = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\,.}$$

Die Gestalt der Lösungsmenge hängt vom Vorzeichen von χ ab.

Satz (Beukers, Darmon-Granville)**:**

(1) $\chi > 0 \Rightarrow$ unendlich viele primitive Lösungen in endlich vielen polynomialen Familien.
(2) $\chi = 0 \Rightarrow$ einzige nichttriviale primitive Lösung ist $2^3 + 1^6 = 3^2$.
(3) $\chi < 0 \Rightarrow$ nur endlich viele primitive Lösungen.

Der Prototyp für Fall (1) ist die bekannte Parametrisierung der Pythagoreischen Tripel. Im Fall (2) gibt es nur endlich viele Tripel (p, q, r). Im Fall (3) sind die Lösungen parametrisiert durch rationale Punkte auf endlich vielen *Twists* einer Kurve vom Geschlecht ≥ 2. Jeder Twist hat nur endlich viele rationale Punkte.

Im uns interessierenden Fall $\chi < 0$ hat man folgende Lösungen gefunden:

$$
\begin{array}{lr}
\bullet & 2^3 + 1^r = 3^2\,, \qquad r \geq 7 \\
 & 7^2 + 2^5 = 3^4 \\
 & 13^2 + 7^3 = 2^9 \\
\bullet & 17^3 + 2^7 = 71^2 \\
 & 11^4 + 3^5 = 122^2 \\
 & 1\,549\,034^2 + 33^8 = 15\,613^3 \\
\bullet & 2\,213\,459^2 + 1\,414^3 = 65^7 \\
\bullet & 15\,312\,283^2 + 9\,262^3 = 113^7 \\
\bullet & 76\,271^3 + 17^7 = 21\,063\,928^2 \\
 & 96\,222^3 + 43^8 = 30\,042\,907^2
\end{array}
$$

Mit Ausnahme der ersten Lösung fällt auf, dass als Exponententripel nur Permutationen von $(2,3,7)$, $(2,3,8)$, $(2,4,5)$ und $(2,3,9)$ auftreten. Sie tragen jeweils 4, 2, 2 und 1 Lösung(en) bei und entsprechen den vier grössten negativen Werten von χ:

$$-\frac{1}{42}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{20} \text{ und } -\frac{1}{18}.$$

Das gibt Anlass zu verschiedenen Vermutungen.

Vermutung 1: Es gibt insgesamt für $\chi < 0$ nur endlich viele Lösungen.

Das würde aus der ABC-Vermutung folgen.

Vermutung 2: Es gibt keine Lösungen für $p, q, r \geq 3$.

Ein amerikanischer Ingenieur namens Beal hat für einen Beweis oder Gegenbeispiel einen Geldpreis von 100 000 \$ ausgesetzt. Die Vermutung wurde allerdings schon früher von Tijdeman und Zagier geäussert.

Vermutung 3: Es gibt keine Lösungen für andere Exponententripel als die vier angegebenen.

Vermutung 4: Die Liste enthält bereits alle Lösungen.

2. Sätze (für $\chi < 0$)

Satz (Wiles etc.)**:** Es gibt keine Lösungen für $(p, q, r) = (n, n, n)$ mit $n \geq 4$.

Satz (Darmon-Merel, Poonen)**:** Es gibt keine Lösungen für $(p, q, r) = (n, n, 2)$ mit $n \geq 5$ und für $(p, q, r) = (n, n, 3)$ mit $n \geq 4$.

Satz (Kraus)**:** Es gibt keine Lösungen für $(p, q, r) = (3, 3, n)$ mit $17 \leq n \leq 10000$, n prim.

Satz (Ellenberg)**:** Es gibt keine Lösungen für $(p, q, r) = (2, 4, n)$ mit $n \geq 211$, n prim.

Satz (Bruin)**:** Es gibt keine Lösungen für Permutationen von $(2, 4, 6)$, $(3, 3, 4)$ und $(3, 3, 5)$.

Satz (Bruin)**:** Die Liste enthält alle Lösungen für Permutationen von $(2, 3, 8)$, $(2, 4, 5)$ und $(2, 3, 9)$.

Unser Spezialfall $(p, q, r) = (2, 3, 7)$ ist interessant:

- Er ist *extremal*: χ hat den grösten negativen Wert.
- Die Exponenten sind verschiedene Primzahlen, so dass sich bekannte Methoden/Ergebnisse nicht unmittelbar anwenden lassen.
- Er trägt (vermutlich) die meisten Lösungen für $\chi < 0$ bei.
- Er ist der letzte Fall, für den interessante Lösungen bekannt sind, aber nicht, ob die Liste komplett ist.

Ausserdem ist es eine reizvolle Aufgabe, die endlich vielen Lösungen einer Gleichung explizit zu bestimmen, besonders dann, wenn sie nicht offensichtlich sind. (Und sich andere daran schon die Zähne ausgebissen haben…)

3. Endlich viele Twists

In unserem Fall gibt es endlich viele Twists der *Kleinschen Quartik*

$$\boxed{x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0},$$

deren rationale Punkte unsere Lösungen parametrisieren.

Ein *Twist* ist hier eine glatte ebene Kurve, die durch ein Polynom vom Grad 4 mit rationalen Koeffizienten beschrieben wird, so dass es eine lineare Transformation mit i. a. irrationalen Koeffizienten gibt, die beide Gleichungen ineinander überführt. Ein einfaches Beispiel ist

$$x^3y + 2\,y^3z + 3\,z^3x = 0.$$

Invariantentheorie liefert Formeln, die einem rationalen Punkt auf einem Twist der Kleinschen Quartik eine (nicht notwendig primitive oder nichttriviale) Lösung von $x^2 + y^3 = z^7$ zuordnen.

Problem: Finde die relevanten Twists!

4. Elliptische Kurven, Frey, Ribet, Wiles und Co.

Wir ordnen einer Lösung $a^2 + b^3 = c^7$ eine elliptische Kurve zu:

$$\boxed{E : y^2 = x^3 + 3\lambda^2 b\, x - 2\lambda^3 a}$$

wobei $\lambda \in \{\pm 1, \pm 3\}$ geeignet zu wählen ist.

Die 7-Torsionsuntergruppe $E[7]$ liefert dann eine Darstellung der absoluten Galoisgruppe von $\mathbb{Q}$, die kleinen "Führer" hat: Er teilt $2^6 \cdot 3^3$. Wir nehmen an, diese Darstellung sei *irreduzibel*.

Nach Wiles und Breuil, Conrad, Diamond und Taylor ist E und damit $E[7]$ "modular".

Nach Ribet folgt (im konkreten Fall), dass $E[7]$ bis auf qudratischen Twist isomorph ist zu $E'[7]$ für eine elliptische Kurve E' aus einer expliziten Liste von 13 Kurven.

Nach Halberstadt und Kraus werden für gegebenes E' die Kurven E durch zwei explizit hinschreibbare Twists der Kleinschen Quartik parametrisiert.

5. Die 10 Kurven

Diese Überlegungen, zusammen mit einer Sonderbetrachtung des reduziblen Falls, führen zu einer endlichen Liste von Twists. Viele davon lassen sich durch Kongruenzbetrachtungen eliminieren. Es bleiben die folgenden 10 Kurven übrig.

$$C_1 : 6x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

$$C_2 : 3x^3y + y^3z + 2z^3x = 0$$

$$C_3 : 3x^3y + 2y^3z + z^3x = 0$$

$$C_4 : 7x^3z + 3x^2y^2 - 3xyz^2 + y^3z - z^4 = 0$$

$$\begin{aligned} C_5 : &-2x^3y - 2x^3z + 6x^2yz + 3xy^3 - 9xy^2z + 3xyz^2 \\ &- xz^3 + 3y^3z - yz^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_6 : &\, x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 \\ &+ 18xyz^2 + 9y^2z^2 - 9z^4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_7 : &-3x^4 - 6x^3z + 6x^2y^2 - 6x^2yz + 15x^2z^2 - 4xy^3 \\ &- 6xyz^2 - 4xz^3 + 6y^2z^2 - 6yz^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8 : &\, 2x^4 - x^3y - 12x^2y^2 + 3x^2z^2 - 5xy^3 - 6xy^2z \\ &+ 2xz^3 - 2y^4 + 6y^3z + 3y^2z^2 + 2yz^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_9 : &\, 2x^4 + 4x^3y - 4x^3z - 3x^2y^2 - 6x^2yz + 6x^2z^2 \\ &- xy^3 - 6xyz^2 - 2y^4 + 2y^3z - 3y^2z^2 + 6yz^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{10} : &\, x^3y - x^3z + 3x^2z^2 + 3xy^2z + 3xyz^2 + 3xz^3 - y^4 \\ &+ y^3z + 3y^2z^2 - 12yz^3 + 3z^4 = 0 \end{aligned}$$

6. Die Punkte

Auf diesen Kurven finden wir die folgenden rationalen Punkte.

$$C_1 : (1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:-1:2)$$

$$C_2 : (1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:-1),\ (1:-2:-1)$$

$$C_3 : (1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:-1)$$

$$C_4 : (1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:1:1)$$

$$C_5 : (1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1)$$

$$C_6 : (0:1:0),\ (1:-1:0),\ \boxed{(0:1:1)},\ \boxed{(0:1:-1)}$$

$$C_7 : (0:1:0),\ \boxed{(0:0:1)},\ \boxed{(0:1:1)}$$

$$C_8 : \boxed{(0:0:1)},\ (2:-1:0)$$

$$C_9 : (0:0:1),\ (1:1:0)$$

$$C_{10} : \boxed{(1:0:0)},\ (1:1:0)$$

Die eingerahmten Punkte ergeben Lösungen unserer Gleichung; sie sind alle schon bekannt. Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren rationalen Punkte auf den Kurven gibt, oder jedenfalls keine, die zu weiteren Lösungen führen könnten.

7. Rationale Punkte mit Chabauty

Zur Bestimmung der rationalen Punkte gibt es eine gute Methode. Sei C eine algebraische Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Zu C gehört eine abelsche Varietät J, die *Jacobische Varietät* von C; ihre rationalen Punkte bilden eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Der Rang r dieser Gruppe heisst *Mordell-Weil-Rang* von J oder C. Ist $r < g$, dann liefert die Methode von Chabauty eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte, die oft scharf ist. Gut verstanden ist der Fall $g = 2$, und allgemeiner, wenn C hyperelliptisch ist.

Unsere Kurven haben jedoch $g = 3$ und sind nicht hyperelliptisch. Um die Chabauty-Methode anzuwenden, braucht man Informationen über die Mordell-Weil-Gruppe. Diese sind für allgemeine Kurven vom Geschlecht 3 sehr schwierig zu bekommen.

Unsere Twists sind aber sehr speziell und verhalten sich fast wie hyperelliptische Kurven. Wir haben deshalb den "2-Abstieg", mit dem man den Rang r nach oben abzuschätzen kann, auf diesen Typ von Kurven verallgemeinert. Die Hoffnung ist nun, dass dieser Rang jeweils höchstens 2 ist, damit sich Chabauty anwenden lässt.

Wir haben für alle Kurven in unserer Liste den Rang bestimmt. Für alle Kurven *mit Ausnahme von* C_5 ist der Rang höchstens 2. Auf diese neun Kurven haben wir die Chabauty-Methode angewandt und bewiesen, dass sie keine weiteren Lösungen liefern.

Für C_5 ist der Rang 3; die Gruppe $J_5(\mathbb{Q})$ hat die Form $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hier kommt uns zu Hilfe, dass wir keine primitiven Lösungen von dieser Kurve erwarten. Jeder rationale Punkt auf C_5, der eine primitive Lösung liefern würde, ergäbe ein Element $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \cong J_5(\mathbb{Q})$. Betrachtung modulo p für $p = 2, 3, 13, 23, 97$ liefert Kongruenzen mod 14 für n_1, n_2, n_3, die schliesslich zu einem Widerspruch führen.

Damit ist gezeigt, dass die Liste der bekannten Lösungen vollständig ist.

8. Rück- und Ausblick

Das Ergebnis an sich mag vielleicht nicht so sehr interessant sein. Worum es mir hierbei geht, ist zu demonstrieren, dass wir heute in der Lage sind, solche Probleme erfolgreich zu lösen.

Bei der Lösung war es nötig, sowohl neuere theoretische Ergebnisse (Ribet, Wiles) zu verwenden, als auch eher praktisch orientierte Fortschritte auf der algorithmischen Seite zu machen.

Dass auch einiges an Computer-Schweiss geflossen ist, soll nicht unerwähnt bleiben.

Ein Projekt für die Zukunft ist, mit ähnlichen Methoden alle Gleichungen $x^2 + y^3 = z^p$ (mit $p \geq 7$ prim) zu behandeln. Vielleicht können wir dann sogar zeigen, dass die Liste aller bekannten Lösungen von $x^2 + y^3 = \pm z^n$ $(n \geq 6)$ vollständig ist.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 175–190
Universität Göttingen, 2003-04

EXCEPTIONAL SEQUENCES OF LINE BUNDLES ON TORIC VARIETIES

L. Hille
Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, 20146 Hamburg, Germany • *E-mail :* hille@math.uni-hamburg.de

Abstract. We consider a toric variety X over $\mathbb{C}$ and are interested in the existence of a full (strongly) exceptional sequence of line bundles on X. On toric surfaces we construct a full exceptional sequence of line bundles and obtain criteria when this sequence is also strongly exceptional. Moreover, we discuss some generalizations for higher dimensional toric varieties.

1. Introduction

The derived category of coherent sheaves on a projective n–space $\mathbb{P}^n$ admits a description via modules over a certain finite dimensional algebra ([**Bl78**], [**BnGG78**]). Similar descriptions are also known for flag varieties ([**Kap88**]). On such a variety$X$ there exists a sequence of vector bundles (a full strong exceptional sequence), whose direct sum T induces an equivalence

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, -) : \mathscr{D}(X) \longrightarrow \mathscr{D}^b(\mathrm{mod}\text{–}B)$$

between the bounded derived category of coherent sheaves on X with the bounded derived category of finitely generated right modules over $B := \mathrm{End}\,(T)$.

January 19th, 2004.

Further examples of full strongly exceptional sequences also exist on products of these varieties and, if one allows objects in the derived category instead of vector bundles, also on certain monoidal transformations (e. g. blow ups) of X and projective space bundles over X. However, the existence of such a derived equivalence is very restrictive for X: e. g. the Grothendieck group of $\mathrm{Coh}\,(X)$ is a finitely generated abelian group (since mod$-B$ has a finitely generated free abelian Grothendieck group).

There exists one class of algebraic varieties, the class of smooth projective toric varieties, satisfying this condition on the Grothendieck group. Moreover, there exists so far no negative result on the existence of a full strong exceptional sequence. It is even conjectured by A. King [**Kin97**] that any smooth projective (or even proper) toric variety admits a full strong exceptional sequence of line bundles. So far only partial results are known. For some particular toric varieties associated to quivers ([**AH99**]) partial sequences could be constructed. They do, in general, not coincide with the sequences we construct in this note. Recently, Costa and Miro-Roig ([**CMr04**]) constructed full strongly exceptional sequences of line bundles on some further toric varieties. In particular, on all toric varieties X with $\mathrm{Pic}\,(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ (for $\dim X = 2$ these are the Hirzebruch surfaces), and on blow ups of $\mathbb{P}^2$ and the Hirzebruch surfaces. Further examples can be found in [**Kin97**] and [**Per03**]. On toric varieties with $\mathrm{Pic}\,(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ (they can be classified) one can, similarly to our classification of full exceptional sequences on the Hirzebruch surfaces (see section 6), classify all full exceptional sequences of line bundles. Finally, we should mention the preprint ([**Per03**]) of M. Perling, who computed explicitly full strong exceptional sequences of line bundles on the five toric del Pezzo surfaces together with the corresponding endomorphism algebras. His results can also obtained from [**AH99**] by adding one additional line bundle to the sequences obtained therein.

We briefly outline the contents of this note. In Section 2 we recall the main definitions on exceptional sequences. Then, in Section 3, we collect some facts on smooth projective toric varieties, in particular, on toric varieties in dimension 2 and 3. In Section 4 we use the formulas for the cohomology of line bundles on toric varieties to obtain some first results. In Section 5 we construct explicitly a sequence ε of line bundles, depending on an order of the rays in the fan Σ of X. In our main results (Theorem 5.1 and Theorem 5.3) we relate this order to the condition (strongly) exceptional for ε. In particular, we can show:

Theorem 1.1. *Let X be a smooth projective toric surface. Then there exists a full exceptional sequence of line bundles on X. Let E_i $(i = 1, \dots, r)$ be the T–invariant prime divisors of X, where $E_r^2 \leqslant E_i^2$ for all $i = 1, \dots, r-1$. If, in* *addition, $E_i^2 \geqslant -2$ for $i = 1, \ldots, r-1$ (we do not need any condition on E_r), then there exists even a full strongly exceptional sequence of line bundles on X.*

Corollary 1.2. *Let X be a toric surface with T–invariant prime divisors E_i, $i = 1, \ldots, r$, as above ($E_i^2 \geqslant -2$ for all $i = 1, \ldots, r-1$). Then the derived category $\mathscr{D}^b(X)$ of coherent sheaves on X is equivalent to $\mathscr{D}^b(\text{mod}–B)$, where B is the endomorphism algebra of the direct sum of the line bundles in the full strongly exceptional sequence above.*

We assume the reader is familiar with toric geometry (see e. g. [**Ful93**], [**Oda88**], or [**KKMSD73**]) and with basic facts on derived categories (see [**BO02**] and references therein for an overview, we also mention [**Hap88**] for basic facts on the derived category of modules over a finite dimensional algebra). In this note we consider only smooth projective varieties. For simplicity we work over the field of complex numbers: all varieties, categories and algebras are over $\mathbb{C}$. For a toric variety X we denote by $\Sigma = \Sigma(X)$ its fan in the $\mathbb{R}$–vector space $N_{\mathbb{R}}$ containing the lattice $N \simeq \mathbb{Z}^d$, where d is the dimension of X and the dimension of $N_{\mathbb{R}}$. We denote the rays in Σ with $\tau_1, \ldots, \tau_r$ (so Σ contains precisely r rays) and we denote the first lattice point in τ_i with v_i. Later it will be crucial to consider distinguished orders on the set of rays (or the set of lattice points). Moreover, we intersect the fan Σ with the $(d-1)$–dimensional unit sphere S^{d-1} and obtain a triangulation of S^{d-1}. The 1–skeleton of this triangulation is a graph, it is for $d \leqslant 3$ even a planar graph. We denote its vertices also by v_i. A *Hamiltonian cycle* is a cycle (a closed path) in the graph meeting each vertex precisely once.
For an algebraic variety we denote the structure sheaf with $\mathscr{O}_X$, the canonical sheaf with ω_X and for a Weil divisor E the twisted line bundle (it admits a section vanishing along E) with $\mathscr{O}(E)$. For two divisors E_1 and E_2 on a surface we denote by $E_1 \cdot E_2$ its intersection product and by E_1^2 its selfintersection number. For a line bundle $\mathscr{L}$ on X we denote the lth sheaf cohomology group by $\mathrm{H}^l(X; \mathscr{L})$. For a topological space we also need the usual singular cohomology groups (with compact support), which we denote by $\mathrm{H}^l(N)$ ($\mathrm{H}^l_Z(N)$), where we only use complex coefficients.

2. Exceptional sequences and tilting bundles

Let $\mathscr{A}$ be the category of finitely generated modules over a finite dimensional algebra A of finite global dimension or the category of coherent sheaves on a smooth projective variety X. We denote by $\mathscr{D}$ the bounded derived category of $\mathscr{A}$. The categories $\mathrm{Coh}\,(X)$ and $\mathscr{D}$ admit a Serre functor which we denote by

ω. Then there exist natural isomorphisms $\operatorname{Ext}^l(M,N) \simeq \operatorname{Ext}^{d-l}(N,\omega(M))^*$, where d is the dimension of X or the global dimension of A. For a finite dimensional algebra the Serre functor does not exist in mod–A (except A is semi-simple). If A is hereditary (that is $\operatorname{Ext}^2(M,N)=0$ for all A–modules M and N) the category $\mathscr{A} = \text{mod–}A$ admits a Serre functor, the Auslander-Reiten translation, between the subcategory of modules without projective direct summand and the subcategory of modules without injective direct summand (see also [**Hap88**]).

Definition 2.1. An object E in $\mathscr{A}$ or $\mathscr{D}$ is called *exceptional* if $\operatorname{End}(E)=\mathbb{C}$ and $\operatorname{Ext}^l(E,E)=0$ for all $l\neq 0$.
A sequence of objects $\varepsilon=(E_1,\dots,E_r)$ in $\mathscr{A}$ or in $\mathscr{D}$ is called *exceptional* if each object E_i for $i=1,\dots,r$ is exceptional and $\operatorname{Ext}^l(E_i,E_j)=0$ for all l and all $i>j$.
An exceptional sequence is *strongly exceptional* if in addition $\operatorname{Ext}^l(E_i,E_j)=0$ for all $l\neq 0$ and all i,j.
A sequence ε is called *full* if the category $\mathscr{D}$ is generated as a derived category by the objects E_i for $i=1,\dots,n$.
Each exceptional sequence $\varepsilon=(E_1,\dots,E_r)$ defines an infinite sequence

$$S(\varepsilon)=(\dots,\omega(E_r),E_1,\dots,E_r,\omega^{-1}(E_1),\dots,\omega^{-1}(E_r),\omega^{-2}(E_1),\dots)=(E_i)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Such a sequence is called a *helix* if each subsequence $\varepsilon^i=(E_i,\dots,E_{r+i-1})$ is full and strongly exceptional. We also say ε *generates a helix*.

Let $\varepsilon=(E_1,\dots,E_r)$ be a full and strongly exceptional sequence of objects in either $\mathscr{A}$ or $\mathscr{D}$ and denote by B the endomorphism algebra of $E:=\oplus_{i=1}^r E_i$ (it is a finite dimensional $\mathbb{C}$–algebra of finite homological dimension). Then the functors

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,-):\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{D}^b(\text{mod–}B) \text{ and } -\otimes^{\mathbb{L}}_B E:\mathscr{D}^b(\text{mod–}B)\longrightarrow\mathscr{D}$$

induce mutually quasi-inverse equivalences of derived categories. In this way one can describe the category $\mathscr{D}$ as a bounded derived category of right B–modules.

In this note we are mainly interested in exceptional sequences of line bundles on toric varieties. It is conjectured, that any smooth projective toric variety X admits a full and strongly exceptional sequence of line bundles.

There also exists the notion of a tilting bundle $\mathscr{T}$ on a variety X (see e. g. [**Bae88**]). If the indecomposable direct summands of a tilting bundle are line bundles, then one can order these line bundles so that they form a full and strongly exceptional sequence. Therefore, we restrict our consideration to exceptional sequences.

3. Fans of smooth projective toric varieties

In this section we recall some theory from toric geometry. We follow [**Ful93**] and [**Oda88**], for general facts on surfaces we also mention [**BPVdV84**]. Let X be a toric variety and $\Sigma = \Sigma(X)$ the corresponding fan contained in the vector space $N_{\mathbb{R}}$ with lattice N. A cone in Σ is denoted by σ and we denote by $\tau_1, \ldots, \tau_r$ the set of all rays in Σ. Further let $v_i \in \tau_i$ be the first lattice point along τ_i. From now on let X be smooth and complete, so each cone σ is generated by a part of a $\mathbb{Z}$-basis and the support $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ of Σ equals $N_{\mathbb{R}}$.

We recall the classification of smooth projective toric surfaces: Then $N \simeq \mathbb{Z}^2$ and we have a set of vectors $v_1, \ldots, v_r$ (where the corresponding rays are ordered counterclockwise around 0) in N satisfying $v_{i-1} + a_i v_i + v_{i+1} = 0$ for all $i \in \mathbb{Z}/r$. To any ray τ_i one can associate the corresponding prime divisor E_i. These divisors satisfy $E_i \cdot E_j = 1$ for $j = i+1$ or $j = i-1$, $E_i^2 = a_i$, and all remaining intersection numbers $E_i \cdot E_j$ are zero. It turns out that the cyclic sequence $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ determines the surface X up to (toric) isomorphism. The sequence $(1, 1, 1)$ belongs to the two-dimensional projective space $\mathbb{P}^2$ and the sequence $(0, n, 0, -n)$ to the Hirzebruch surface $\mathbb{F}_n$. All other sequences corresponding to smooth projective toric surfaces can be obtained by a sequence of blow ups. A blow up $X \longrightarrow X'$ corresponds to a "blow up" of cyclic sequences

$$(\ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots) \mapsto (\ldots, a_{i-1}, a_i - 1, -1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \ldots).$$

A cyclic sequence belongs to a toric surface X precisely when

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a_r \end{pmatrix} = 1.$$

For $r \geqslant 5$ there exists always some i with $a_i = -1$. Thus we can blow down the corresponding T–equivariant prime divisor E_i and obtain a toric surface. Let Σ be the fan of the toric surface X and connect the lattice points v_i pairwise by line segments $v_i - v_{i+1}$. The piecewise linear cyclic path $v_1 - v_2 - \ldots v_r - v_1$ in $N_{\mathbb{R}}$ is convex, precisely when $E_i^2 \geqslant -2$ and it is strongly convex (v_i is not an element on the line through v_{i_1} and v_{i+1}) precisely when $E_i^2 \geqslant -1$. Later we use the (strong) convexity of the piecewise linear path $v_1 - v_2 - \ldots - v_{r-1}$ for the construction of strongly exceptional sequences.

Example 3.1. We show an example of the rays of a fan for a smooth toric variety. The dots indicate the lattice points v_i. The corresponding sequence is $(-1,-1,1,-1,-2,-1,-4)$ (counter-clockwise starting northwest). The piecewise linear path $v_1 - v_2 - \ldots v_7 - v_1$ is also indicated, it is not convex in v_7.

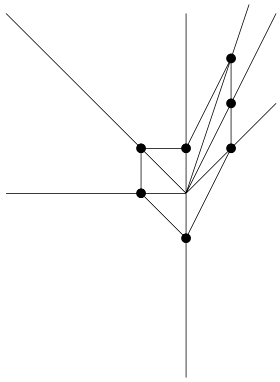


figure 1 the fan of a smooth projective toric surface

We also need some results for toric threefolds. The fan Σ induces a triangulation of the two-dimensional unit sphere S^2. Let v_0, v_1, v_2, v_3 be four pairwise different lattice points in rays of Σ with v_0, v_1 and v_2 pairwise connected and v_1, v_2 and v_3 pairwise connected. Then there exists a unique equation

$$v_0 + a(1,2)v_1 + a(2,1)v_2 + v_3 = 0$$

with integers $a(1,2)$ and $a(2,1)$. In this way we can associate to any toric threefold X a double weighted planar graph consisting only of triangles. Again X (or its fan) can be reconstructed from the double weighted planar graph (see [**Oda88**], 2.3). Let $X \longrightarrow X'$ be a blow up of a T–fixed point P in X'. Then the associated double weighted graph of X can be obtained as follows from the double weighted graph of X': the point P corresponds to a triangle in the graph of X'. We insert a new point p in the center of this triangle and connect it with the three vertices of the triangle. The double weights of the new double weighted graph are obtained as follows. Note that for the associated fan we obtain a new ray τ_p with lattice point $v_p = v_1 + v_2 + v_3$, where v_1, v_2, and v_3 are the vertices of the chosen triangle. The corresponding double weights are $(1,-1) = (a(i,p), a(p,i))$ for all new edges in the graph ($i = 1,2,3$). The change of the remaining double weights can be easily computed from this formula (some weights $a(i,j)$ are replaced by $a(i,j) - 1$ in the new graph). Later we will need a planar graph corresponding to a three-dimensional fan which does not admit a Hamiltonian cycle. This is achieved by using a sequence of blow ups constructed in the following example.

Example 3.2. I would like to thank T. Andreae for the following example of a graph not admitting an Hamiltonian cycle. We consider the three-dimensional projective space $\mathbb{P}^3$ and blow up one T–fixed point. Then we obtain a smooth projective toric variety X with 6 T–fixed points. The 1–skeleton of the fan intersected with the two-dimensional sphere is the graph on the left hand-side in the following figure. Then we blow up all 6 T–fixed points of X and obtain a smooth projective toric variety corresponding to the graph on the right hand-side of the figure below. The graph is obtained from the first one by inserting a new vertex for each triangle and all edges connecting a new vertex with the vertices of the corresponding triangle. The resulting graph does not admit an Hamiltonian cycle, since one vertex of two neighbors in a cycle must be a $\bullet$. Since there are 11 vertices, but only 5 bullets, an Hamiltonian cycle can not exist.

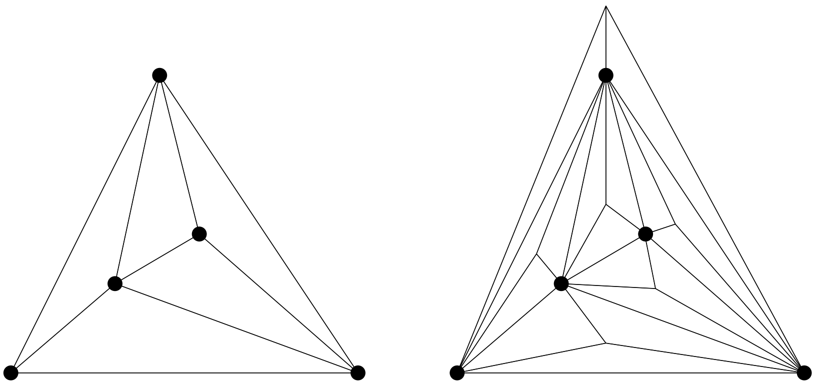


figure 2 a planar graph not admitting an Hamiltonian cycle

4. Cohomology of line bundles on toric varieties

It is crucial for checking whether a sequence of line bundles is (strongly) exceptional to compute the cohomology groups of line bundles. There exist formulas in terms of homology with compact support of a certain subset $Z(h,\chi)$ in N, depending on a character χ and the class of an T–equivariant line bundle $\mathscr{L}_h$ on X represented by a certain function h on N (or, as we will see below, by a function h on the set $\{v_1,\ldots,v_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}$). We first recall the classification of line bundles and T–equivariant line bundles on toric varieties. Then we present formulas for the cohomology of the line bundles.

Let D be a Weil divisor on a toric variety X. Each D is linearly equivalent to a Weil divisor of the form $\sum a_i E_i$, where $a_i \in \mathbb{Z}$ and E_i is the T–equivariant prime divisor corresponding to the ray $\tau_i = \mathbb{R}^+ v_i$. Moreover, each line bundle on X admits a T–equivariant structure. Consequently, the map from the isomorphism classes of T–equivariant line bundles (the T–equivariant Picard group $\mathrm{Pic}^T(X)$) to the Picard group $\mathrm{Pic}(X)$ of X is surjective. The group $\mathrm{Pic}^T(X)$ can be identified with the set of all functions $\varphi : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfying the following two conditions:
1.) $\varphi_{|\sigma}$ is linear (we say h is *piecewise linear*) and
2.) $\varphi(N) \subseteq \mathbb{Z}$ (it maps lattice points to integers, that is h is *integral*).
One can identify such a function h with its restriction to the lattice points $\{v_1, \ldots, v_r\}$. If X is smooth and complete, then each function $\{v_1, \ldots, v_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ extends uniquely to a function h as above. In this way we identify the function h always with its restriction to the lattice points v_i and we denote the corresponding T–equivariant line bundle by $\mathscr{L}_h$. It turns out, that the function h defines a Weil divisor $D_h := \sum_{i=1}^r h(v_i)E_i$ and $\mathscr{L}_h$ is isomorphic to $\mathscr{O}(D_h)$ (as line bundles without the T–structure). Finally D_h and D_g are linearly equivalent precisely when $h - g$ is a linear function on N, that is $h - g$ is an element of M. We obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Pic}^T(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0,$$

where we identify $\mathrm{Pic}^T(X) \simeq \mathbb{Z}^r$ with the set of functions $h : \{v_1, \ldots, v_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Since any line bundle L admits a T–equivariant structure, we can choose a particular T–equivariant structure and compute the cohomology with respect to this equivariant structure. Then it turns out that the cohomology $\mathrm{H}^l(X, L)$ decomposes into weight spaces

$$\mathrm{H}^l(X, L) = \bigoplus_{\chi \in M} \mathrm{H}^l(X, L)_\chi.$$

If we change the equivariant structure of L we obtain just a shift in the weights χ, in particular, we obtain isomorphic cohomology groups. It remains to understand the groups $\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h)_\chi$ for a given piecewise linear integral function h.

Definition 4.1. Since we are mainly interested in vanishing theorems, we define χ to be *critical* for h if $\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h)_\chi \neq 0$ for some $l \neq 0$.

For a given piecewise linear function h and a character χ we define a closed subset

$$Z(h,\chi) := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \chi(n) + h(n) \geqslant 0\}$$

in N. We denote by $\mathrm{H}^l_{Z(h,\chi))}(N_{\mathbb{R}})$ the (usual) cohomology group of $N_{\mathbb{R}}$ with compact support $Z(\chi, h)$ and coefficients in $\mathbb{C}$. It can also be defined as the relative cohomology group $\mathrm{H}^l(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi))$ (with coefficients in $\mathbb{C}$). Using the long exact cohomology sequence associated to the pair $(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi))$ and the homotopy between $N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi)$ and $S^{d-1} \cap (N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi))$ (S^{d-1} is the unit sphere around 0), we obtain

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0_{Z(h,\chi))}(N_{\mathbb{R}}) & \neq & 0 \text{ iff } Z(h,\chi) = N, \\ \mathrm{H}^1_{Z(h,\chi))}(N_{\mathbb{R}}) & \neq & 0 \text{ iff } Z(h,\chi) \neq \emptyset \text{ and is not connected, and} \\ \mathrm{H}^l_{Z(h,\chi))}(N_{\mathbb{R}}) & = & \mathrm{H}^{l-1}(N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi)) = \mathrm{H}^{l-1}((N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi)) \cap S^{d-1}). \end{array}$$

Theorem 4.2. [**Ful93**], [**Oda88**]

$$\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h)_\chi \simeq \mathrm{H}^l_{Z(h,\chi))}(N_{\mathbb{R}})$$

Since we have an isomorphism $\mathrm{Pic}\,(X) \simeq \mathbb{Z}^r/M$ of lattices, we can identify isomorphism classes of line bundles on X with lattice points. We denote by H^l the set of all lattice points $h \in \mathrm{Pic}\,(X)$ with $\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h) \neq 0$. This definition does not depend on the chosen representative of the function h in $\mathrm{Pic}^{\,T}(X) \simeq \mathbb{Z}^r$. It turns out, that each cohomology region H^l decomposes into a finite union of cones (which are strongly convex integral with apex, for $l \neq 0$, *not* in zero).

$$\mathrm{H}^l_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i \in I(l)} C^l(i)$$

for some finite index set I. It is not difficult to determine these cones and their apex explicitly:
For this we consider for a subset $V \subset \{1, \ldots, r\}$ a particular piecewise linear integral function h_V defined by $h_V(v_i) = 0$ for $i \notin V$ and $h_V(v_i) = -1$ for $i \in V$.

Theorem 4.3. *1) $I(0)$ and $I(d)$ are sets with one element. Thus $\mathrm{H}^0 \simeq \mathrm{H}^d, h \mapsto h_{\{1,\ldots,r\}} - h$ is an isomorphism of integral cones induced by Serre duality. In particular, $\mathscr{L}_{h_{\{1,\ldots,r\}}} \simeq \omega_X$.*
2) The apex of a cone $C^l(i)$ is represented by a function of the form h_V for some subset V of $\{1, \ldots, r\}$. In particular, $I(l)$ can be naturally identified with a subset of $\mathscr{P}(\{1, \ldots, r\})$ (for $l \neq 0, d$ it consists only of subsets V of cardinality at least 2 and at most $d-2$). We denote this cone by $C^l(V)$.

3) Let V be a subset of $\{1,\dots,r\}$. Then we define $C^l(V)$ as the image of

$$\{h \in Pic^T(X) \mid h = h_V + h_V^+ \text{ where } h_V^+(v_i) \geqslant 0, i \notin V; h_V^+(v_i) \leqslant 0, i \in V\}$$

and the cohomology region H^l decomposes into cones

$$\mathrm{H}^l = \bigcup_V C^l(V),$$

where V runs through all subsets $V \subset \{1,\dots,r\}$ with $\mathrm{H}^l(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \backslash Z(h_V, 0)) \neq 0$.

Example 4.4. Let X be a surface. Then we only need to compute $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{L}_h)$ (H^0 is the cone with apex in 0, generated by the functions $-h_{\{i\}}$ for $i = 1,\dots,r$, and H^2 is dual by part 1) of the theorem above). A cone $C^1(V)$ is a cone in H^1 precisely when V is a subset with at least two connected components (intersect Σ with S^1, we get a cyclic graph, and consider V as a subset of the vertices of this graph). For the Hirzebruch surfaces the cones are computed in section 6.

The proof of the main theorem is based on the following observation (compare with [**AH99**], Lemma 3.4 and Prop 3.5): Let h be a piecewise linear function (not necessarily integral) on $N_{\mathbb{R}}$. We define

$$Z^+(h,\chi) := \bigcup_{\chi(n)+h(n) \geqslant 0 \mid \forall n \in \sigma} \sigma$$

to be the union of all cones σ in N, where the inequality defining $Z(h,\chi)$ is valid on each point n of the cone σ (we can check this either for lattice points n or for all points n and get the same set $Z^+(h,\chi)$, since all cones σ are lattice cones).

Proposition 4.5. *The pair $(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \backslash Z(h,\chi))$ is homotopic to the pair $(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \backslash Z^+(h,\chi))$, in particular,*

$$\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h)_\chi \simeq \mathrm{H}^l(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \setminus Z(h,\chi) \simeq \mathrm{H}^l(N_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}} \setminus Z^+(h,\chi)).$$

Proof. The homotopy can be constructed explicitly by changing h continuously to a corresponding h_V. One only needs to check that the change of h does not change the homotopy class of $Z(h,\chi)$. □

Finally, in this section we show that the set of critical characters χ is empty for a certain set of piecewise linear functions h_V: V is a subset of $\{1,\dots,r\}$ with $Z(h_V, 0)$ homotopic to a half space $N_{\mathbb{R}}^+$ in $N_{\mathbb{R}}$. In particular, V and its complement must both be connected in the 1–skeleton of $\Sigma \cap S^{d-1}$.

Proposition 4.6. *1) The set of critical characters for h_V contains at most one element: the zero character.*
2) If in addition $Z(h_V, 0)$ is homotopic to a half space then the set of critical characters for h is empty.

*Proof***.** The proof follows immediately from the following lemma. □

Lemma 4.7. *a) Let $N^0_{\mathbb{R}} \subset N_{\mathbb{R}}$ be a subvector space of codimension 1 and $N^+_{\mathbb{R}}$ and $N^-_{\mathbb{R}}$ be the corresponding half spaces. Assume $\chi(v_i) + h(v_i) \geqslant 0$ for all lattice points $v_i \in N^+_{\mathbb{R}}$ and $\chi(v_i) + h(v_i) < 0$ for all $v_i \in N^-_{\mathbb{R}}$. Then $Z(h, \chi)$ is homotopic to a half space and, consequently, χ is not critical for h.*
b) For $h = h_V$ and $\chi \neq 0$, the condition in a) is satisfied for $N^+_{\mathbb{R}} := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \chi(n) > 0\}$, $N^0_{\mathbb{R}} := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \chi(n) = 0\}$, and $N^-_{\mathbb{R}} := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \chi(n) < 0\}$.

*Proof***.** Note that the lemma checks the condition only on the lattice points v_i on the rays. One shows that $Z(h, \chi) \cap S^{d-1}$ is star like, consequently, homotopic to a halfspace. To prove b) we note that $\chi(v_i) + h_V(v_i) \geqslant 0$ whenever $\chi(v_i) > 0$ and $\chi(v_i) + h_V(v_i) < 0$ whenever $\chi(v_i) < 0$, by definition of h_V. □

5. Construction of exceptional sequences

Proposition 4.6 shows that for the functions h_V for $V \subset \{1, \ldots, t\}$ the cohomology of $\mathrm{H}^l(X, \mathscr{L}_h)_\chi$ is already zero for all $\chi \neq 0$. We use this vanishing result to construct a sequence of line bundles (depending on a chosen order of the rays τ_i or the lattice points v_i), which is a candidate of a full (strongly) exceptional sequence of line bundles.

In this section we fix an order on the set $\tau_1, \ldots, \tau_r$ of rays in Σ. To such an order we associate a sequence of line bundles, where we define $\mathscr{L}_V := \mathscr{L}_{h_V}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\mathscr{L}_0, \mathscr{L}^{-1}_{\{1\}}, \mathscr{L}^{-1}_{\{1,2\}}, \ldots, \mathscr{L}^{-1}_{\{1,\ldots,r-2\}}, \mathscr{L}^{-1}_{\{1,\ldots,r-1\}}) \\ &= (\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(E_1), \ldots, \mathscr{O}(E_1 + \ldots + E_{r-2}), \mathscr{O}(E_1 + \ldots + E_{r-1}). \end{aligned}$$

Theorem 5.1. *1) If ε is exceptional then the vertices $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_r, v_1$ form an Hamiltonian cycle in the 1–skeleton of the triangulation $\Sigma \cap S^{d-1}$ of S^{d-1}.*
2) The sequence ε is full precisely when X is either $\mathbb{P}^n$ or a toric surface.
3) For a toric surface X, the sequence ε is strongly exceptional, precisely when $E_i^2 \geqslant -1$ for all $i = 1, \ldots, r-1$.
4) For a toric surface X, the sequence ε induces a helix $S(\varepsilon)$ precisely when $E_i^2 \geqslant -1$ for all $i = 1, \ldots, r$.
5) For a toric 3–fold or a surface X the sequence ε is exceptional precisely when

the vertices $1, 2, 3, \ldots, n, 1$ *form an Hamiltonian cycle in the* 1*–skeleton of the triangulation* $\Sigma \cap S^{d-1}$ *of* S^{d-1}*.*

Remark 5.2. Thus we proved the existence of a full exceptional sequence consisting of line bundles on each smooth projective toric surface X, since we can order the rays counterclockwise to get an Hamiltonian cycle in the triangulation of S^1. Unfortunately, the sequence is not full for $\dim X > 2$, except X is the projective space. Anyway, even in dimension 3 there exists not always an Hamiltonian cycle in the 1–skeleton of $S^2 \cap \Sigma$ (a counterexample was constructed in Section 3).
We note that part 3) contains only a condition on the selfintersection numbers of E_i for $i = 1, \ldots, r-1$. Consequently, using the classification of toric surfaces, there exist infinitely many those surfaces. In contrast, the only toric surfaces satisfying the condition in 4) are the five toric del Pezzo surfaces (the toric Fano surfaces).
The theorem above does not cover all known examples of full (strongly) exceptional sequences of line bundles (see [**CMr04**]). If we change the sequence ε slightly, we can even replace the condition $E_i^2 \geqslant -1$ in the theorem above by the condition $E_i^2 \geqslant -2$ (Theorem 5.3).

If X is a surface with $E_i^2 \geqslant -2$ for $i = 1, \ldots, r-1$, then we define a modified sequence $\varepsilon := (\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_r)$ as follows: $\mathscr{L}_1 := \mathscr{O}_X$ and $\mathscr{L}_{i+1} \otimes \mathscr{L}_i^{-1} := \mathscr{O}(E_{s(i)} + E_{s(i)+1} + \ldots + E_i)$, where $E_i^2 = \ldots = E_{s(i)+1}^2 = -2$ and $E_{s(i)}^2 \geqslant -1$, if such a sequence $E_{s(i)}, E_{s(i)+1}, \ldots, E_i$ exists. Otherwise we define $\mathscr{L}_{i+1} \otimes \mathscr{L}_i^{-1} := \mathscr{O}(E_i + E_{i+1} + \ldots + E_{r(i)-1} + E_{r(i)})$, where $E_i^2 = \ldots = E_{r(i)-1}^2 = -2$ and $E_{r(i)}^2 \geqslant -1$. From the classification follows, that such a sequence exists.

Theorem 5.3. *Let* X *be a toric surface with* $E_i^2 \geqslant -2$ *for* $i = 1, \ldots, r-1$*. Then the sequence* ε *constructed above is full and strongly exceptional.*

Corollary 5.4. *On any toric surface exists a full exceptional sequence of line bundles. On any toric surface with* $E_i^2 \geqslant -2$ *for all* $i = 1, \ldots, r-1$ *exists a full strongly exceptional sequence of line bundles.*

*Proof***.** The proof follows from Theorem 5.1 and Theorem 5.3 above. □

*Proof of Theorem 5.1 and Theorem 5.3***.** The sequence on a surface is full by induction on blow ups $X \longrightarrow Y$. We consider such a sequence on Y, which is full by induction hypothesis, and pull it back. Then one can use standard results on semi-orthogonal decompositions [**BO95**]. To get a start for the induction one classifies all such sequences on $\mathbb{P}^2$ and on the Hirzebruch surfaces $\mathbb{F}_n$ (see section

6). For $\mathbb{P}^n$ one can check directly that the sequence is $(\mathscr{O}, \mathscr{O}(1), \ldots, \mathscr{O}(n))$, which is full (and strongly exceptional). If $\dim X > 2$ and X is not isomorphic to $\mathbb{P}^n$ then the rank of $K_0(X)$ is larger than r, thus the sequence can not be full.
The proof of Theorem 5.1, 1) just uses Proposition 4.6. The vertices in the 1–skeleton must form an Hamiltonian cycle (that is i is connected with $i+1$), since otherwise $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{L}_{i-1}^{-1} \otimes \mathscr{L}_{i+1})$ does not vanish. Moreover, n must be connected with 1, otherwise $\mathrm{H}^{d-1}(X, \mathscr{L}_1^{-1} \otimes \mathscr{L}_n)$ does not vanish and n must be connected to $n-1$, otherwise $\mathrm{H}^{d-1}(X, \mathscr{L}_0^{-1} \otimes \mathscr{L}_{n-1}) = \mathrm{H}^{d-1}(X, \mathscr{L}_{n-1})$ does not vanish.
Let the vertices form an Hamiltonian cycle. Then one can check for $\dim X \leqslant 3$ that the subset $Z^+(h_{\{i,i+1,\ldots,j\}}, 0)$ and $Z^+(h_{\{j,\ldots,n,1,\ldots,i\}}, 0)$ for any $i \leqslant j$ are contractible (this is obvious if $\dim X = 2$ and needs some additional proof for $\dim X = 3$). Thus the corresponding cohomology groups vanish (proves Theorem 5.1 5)).
The condition *strongly* needs some elementary but longer calculations in terms of the fan, it uses essentially that the configuration of intervals $v_1 - v_2 - \ldots v_{r-1}$ is strictly convex if $E_i^2 \geqslant -1$ (to prove Theorem 5.1 3)) and it is still convex for $E_i^2 \geqslant -2$ (to prove Theorem 5.3).
Theorem 5.1 4) follows from 3).

□

6. Exceptional sequences on Hirzebruch surfaces

In this section we classify all full (strongly) exceptional sequences of line bundles on the Hirzebruch surfaces $\mathbb{F}_n$. We denote the four T–invariant prime divisors by E_1, E_2, E_3, and E_4, so that $E_1^2 = E_3^2 = 0$ and $-E_4^2 = E_2^2 = n$ (for $n \geqslant 0$). In this case the Picard group is of rank 2 with $\mathbb{Z}$–basis $w_1 = \mathscr{O}(E_4)$ and $w_2 = \mathscr{O}(E_1) \simeq \mathscr{O}(E_3)$. There exist precisely four cohomology cones:

$$\begin{array}{rcl} C^0 & = & 0 + \mathbb{R}^+ w_1 + \mathbb{R}^+ w_2, \\ C^1(\{1,3\}) & = & -2w_2 - \mathbb{R}^+ w_2 + \mathbb{R}^+(w_1 + nw_2), \\ C^1(\{2,4\}) & = & -2w_1 - nw_2 + \mathbb{R}^+ w_2 - \mathbb{R}^+(w_1 + nw_2), \text{ and} \\ C^2 & = & -2w_2 - (2+n)w_1 - \mathbb{R}^+ w_1 - \mathbb{R}^+ w_2 \end{array}$$

(compare with the figure below). In the following examples the bullets indicate the dual line bundles of the line bundles in the exceptional sequences.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. We start with the classification for $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{F}_0$. In this case there exists one orthogonal pair up to shift: $\mathscr{O}, \mathscr{O}(-1,1)$. Assume an exceptional sequence contains an orthogonal pair, then (if we start with the trivial

line bundle) we obtain the following possibilities (were we can always switch the two members of the orthogonal pair):
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1,1), \mathcal{O}(1,2), \mathcal{O}(2,1))$, (figure 3, left hand-side)
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(0,1), \mathcal{O}(1,1))$,
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-1,1), \mathcal{O}(0,2), \mathcal{O}(1,3))$.
All these sequences are strongly exceptional and generate a helix. A full exceptional sequence with more than one orthogonal pair does not exist. It remains to classify the full exceptional sequences without an orthogonal pair:
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(a,1), \mathcal{O}(a+1,1))$, (figure 3, center and right hand-side)
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(0,1), \mathcal{O}(1,a), \mathcal{O}(1,a+1))$, for $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (for $a = 0$ it coincides with one sequence above). The sequences are strongly exceptional precisely when a is nonnegative. It generates a helix precisely when $0 \leqslant a \leqslant 2$.
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1,a), \mathcal{O}(1,a+1), \mathcal{O}(2,1))$,
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(a,1), \mathcal{O}(a+1,1), \mathcal{O}(1,2))$, for $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$ (for $a = -1, 0, 1$ the sequence coincides with some sequence above). The sequences are never strongly exceptional.

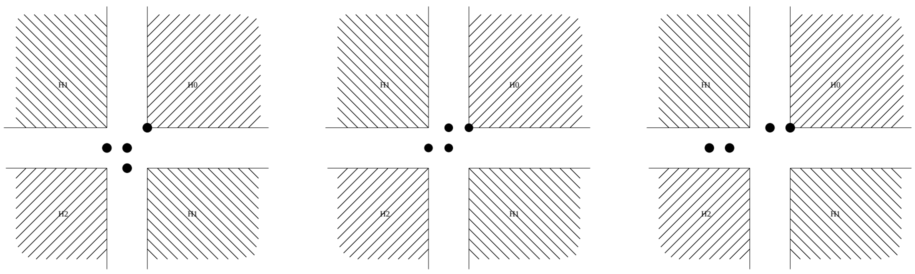


figure 3 some full strongly exceptional sequences for $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$\mathbb{F}_n$, $n \geqslant 1$. For the Hirzebruch surfaces with $n > 0$ orthogonal pairs do not exist. Then we obtain two series of sequences:
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(0,1), \mathcal{O}(1,a), \mathcal{O}(1,a+1))$ (figure 4, center and right hand-side; figure 5 right hand-side) and
$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1,a), \mathcal{O}(1,a+1), \mathcal{O}(2,n+1))$ (figure 4, left hand-side; figure 5, left hand-side).
The first sequence is full exceptional for all a, it is strongly exceptional only for $a \geqslant n$. The second sequence is full exceptional for all a, it is strongly exceptional only for $n = 1$ and $a = 0, 1$, and $n = 2$ and $a = 1$.
Finally, such a sequence generates a helix only if $n = 1$ and $a = 1$ or 2 in the first sequence, or $n = 1$ and $a = 0$ or 1 in the second sequence, or $n = 2$ and $a = 1$ in the first sequence, or $n = 2$ and $a = 1$ in the second sequence.

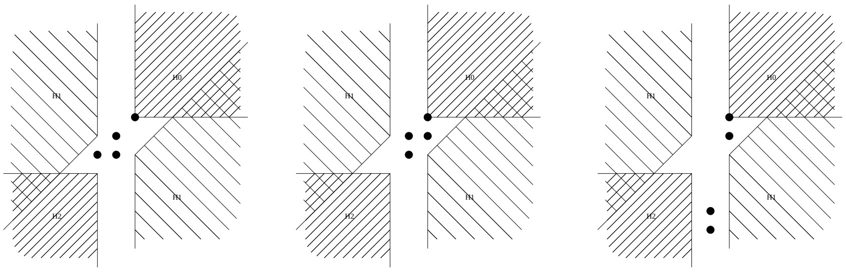


figure 4 some full strongly exceptional sequences for $\mathbb{F}_1$

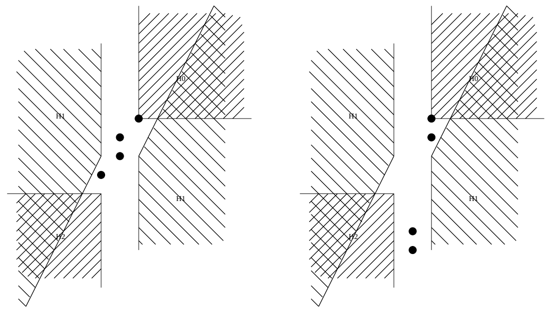


figure 5 some full strongly exceptional sequences for $\mathbb{F}_2$

References

[AH99] K. Altmann & L. Hille – Strong exceptional sequences provided by quivers, *Algebr. Represent. Theory* **2** (1999), no. 1, 1–17.

[Bae88] D. Baer – Tilting sheaves in representation theory of algebras, *Manuscripta Math.* **60** (1988), no. 3, 323–347.

[Bl78] A. A. Beĭ linson – Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **12** (1978), no. 3, 68–69.

[BnGG78] I. N. Bernšteĭ n, I. M. Gel′fand & S. I. Gel′fand – Algebraic vector bundles on $\mathbf{P}^n$ and problems of linear algebra, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **12** (1978), no. 3, 66–67.

[BO95] A. Bondal & D. Orlov – Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties, 1995, `alg-geom/9506012`.

[BO02] ______, Derived categories of coherent sheaves, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, 47–56.

[BPVdV84] W. Barth, C. Peters & A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[CMr04] L. Costa & R. Miro-roig – Tilting sheaves on toric varieties, 2004, preprint.

[Ful93] W. Fulton – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.

[Hap88] D. Happel – *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Kap88] M. M. Kapranov – On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces, *Invent. Math.* **92** (1988), no. 3, 479–508.

[Kin97] A. King – Tilting bundles on some rational surfaces, 1997, preprint.

[KKMSD73] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford & B. Saint-Donat – *Toroidal embeddings. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339.

[Oda88] T. Oda – *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988, An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.

[Per03] M. Perling – Some quivers describing the derived categories of the toric del pezzo surfaces, 2003, preprint.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 191–199
Universität Göttingen, 2003-04

FLÄCHEN VOM NICHT ALLGEMEINEN TYP IN $\mathbb{P}^4$

H.-C. Graf von Bothmer

C. Erdenberger

K. Ludwig

Institut für Mathematik, Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany • *E-mail :* bothmer@math.uni-hannover.de

Abstract. Ellingsrud und Peskine haben 1989 gezeigt, daß es nur endlich viele Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs im $\mathbb{P}^4$ gibt. Bis heute ist es nicht gelungen, diese Familien vollständig zu klassifizieren. Wir stellen die bekannten Klassifikationsergebnisse vor und geben einen Überblick über die bisher bekannten Familien. Dann erläutern wir, wie wir mit Hilfe von Computeralgebra-Methoden über Körpern der Charakteristik 2 eine neue Familie rationaler Flächen im $\mathbb{P}^4$ konstruiert haben und wie man nachweist, daß diese Flächen nach Charakteristik 0 geliftet werden können.

1. Motivation und Gradschranken

Sei S eine glatte projektive Fläche. Dann gibt es eine Einbettung $\varphi : S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ mit $N \leqslant 5$.

*Beweis***.** Da S projektiv ist, gibt es eine Einbettung $\varphi : S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Falls $N > 5$ ist, betrachte man die Sekantenvarietät $\mathrm{Sec}_2\, S \subset \mathbb{P}^N$. Es ist

$$\dim Sec_2 S \leq 2 + 2 + 1 = 5.$$

January 21st, 2004.

Projiziert man von einem Punkt außerhalb Sec_2S, so wird das Bild von S im $\mathbb{P}^{N-1}$ wieder glatt. Dies ist möglich solange $N \geq 5$ ist. $\square$

Also ist eine Fläche $S \subset \mathbb{P}^5$ nichts besonderes. Wann kann man $S \subset \mathbb{P}^4$ erreichen?

***Theorem 1.1* ([EP89]).** *Es existiert eine natürliche Zahl $d_0 \in \mathbb{N}$, so daß*

$$S \subset \mathbb{P}^4 \text{ nicht vom allgemeinen Typ } \Longrightarrow \deg S \leqslant d_0$$

Insbesondere gibt es nur endlich viele Familien solcher Flächen.

Beweisskizze. (i) Für $S \subset \mathbb{P}^4$ gilt die Doppelpunktformel

$$d^2 - 5d - 10(\pi - 1) + 2(6\chi - K^2) = 0$$

wobei $d = \deg S$ der Grad, π das Schnittgeschlecht, χ die Euler Charakteristik und K^2 der Selbstschnitt des kanonischen Divisors von S ist. [**Har77**, Appendix A, Example 4.1.3.]

(ii) Bis auf gut verstandene Fälle vom Grad ≤ 5 gilt

$$K^2 \leqslant 0 \text{ und } 6\chi - K^2 \geqslant 0$$

für Flächen von nicht allgemeinen Typ.

$$\Longrightarrow \pi \geqslant \frac{d^2 - 5d + 10}{10}$$

(iii) Sei $C = S \cap \mathbb{P}^3$ ein allgemeiner Hyperebenenschnitt von S. Dann ist C eine glatte Raumkurve vom Grad d und Geschlecht π. Für solche im $\mathbb{P}^3$ gilt Halphens Schranke [**EP89**]

$$\pi \leqslant 1 + \frac{d^2 + s(s-4)d}{2s},$$

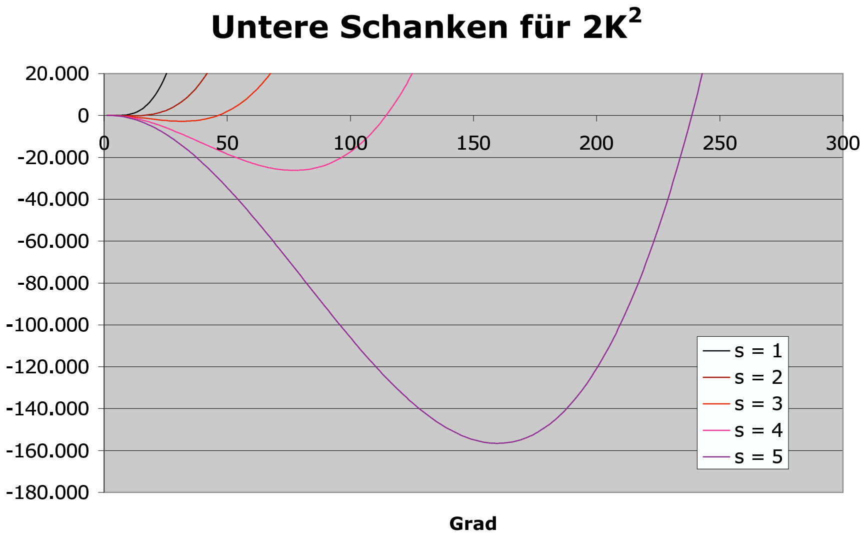
wobei s die Postulation von C ist, d.h. der kleinste Grad einer Hyperfläche, die C enthält. In vielen Fällen ist die Postulation von C die gleiche wie die von S. Eine notwendige Bedingung dafür liefert Roths Lemma [**Rot37**]. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind und $s \geq 6$ ist, dann wiedersprechen sie die beiden Schranken für π bei großen d. Für $s \geqslant 6$ ist d also beschränkt.

(iv) Durch Betrachten von generische Initialidealen findet man ein Polynom $P_s(d)$ mit Leitterm $\frac{d^3}{6s^2}$, so daß für s mit $d > (s-1)^2 + 1$

$$\chi(\mathscr{O}_S) \geqslant P_s(d)$$

gilt. Zusammen mit der Doppelpunktformel und Halphens Schranke erhält man dann

$$\begin{aligned} 0 \geq 2K^2 &= d^2 - 5d - 10(\pi - 1) + 12\chi(\mathscr{O}_S) \\ &\geq d^2 - 5d - 10\left(\frac{d^2 + s(s-4)d}{2s}\right) + 12P_s(d) \end{aligned}$$



$\Longrightarrow$ d beschränkt für $s \leqslant 5$.

□

Der Originalbeweis von Ellingsrud und Peskine [**EP89**] liefert $d_0 \leq 10000$. Die Idee, generische Initialideale zu betrachten, stammt von Braun und Fløystad [**BF94**]. Sie zeigen $d_0 \leq 105$. Genaueres Studium der generischen Initialideale [**DS00**] ergibt schließlich

$$d_0 \leqslant 52.$$

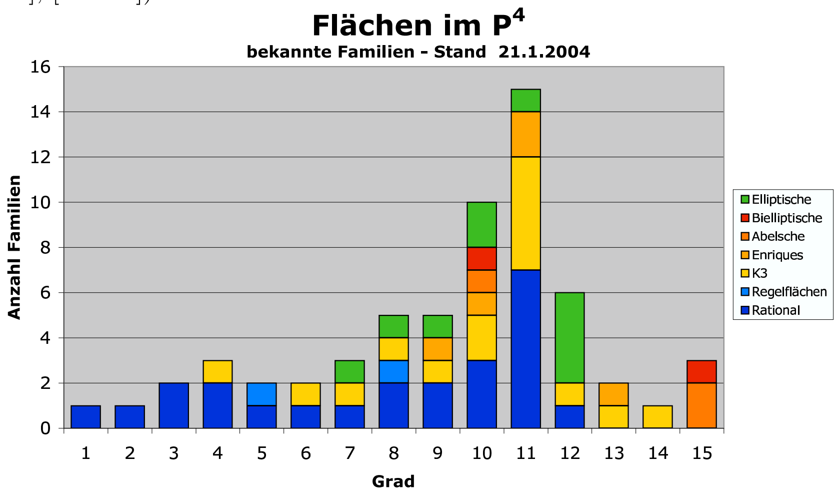
2. Klassifikation

Bekannt sind zur Zeit folgende Teilklassifikationen für glatte Flächen vom nicht allgemeinen Typ im $\mathbb{P}^4$:

$s = 1, 2$	klassisch
$s = 3$	Roth [**Rot37**]/Aure [**Aur90**]/Koelblen [**Koe92**]
$d \leq 9$	via Adjunktion (Eine Übersicht findet sich in [**DS00**])
$d = 10$	via Linkage (Popescu/Ranestad [**PR96**])

3. Konstruktion

Um d_0 von unten zu beschränken, versucht man, explizit Flächen von nicht allgemeinem Typ in $\mathbb{P}^4$ zu konstuieren. Bis jetzt hat man folgende Familien gefunden ([**DES93**] für alle bis dahin bekannten Familien, [**Sch96**], [**ADH$^+$97**], [**ADS98**], [**AR02**]):



$\Longrightarrow d_0 \geqslant 15$

Zur Konstruktion wurden bislang folgende Methoden angewendet:

(i) Angabe von expliziten Linearsysteme auf bekannten Flächen
(ii) Adjunktion
(iii) Linkage
(iv) Schnitte von Rang 2 Vektorbündeln auf $\mathbb{P}^4$
(v) Syzygien

Mit expliziten Linearsystemen und Adjunktion findet man Flächen bis $d = 9$. Linkage liefert Beispiele im Grad 10. Das Horrocks-Mumford-Bündel liefert eine Fläche mit $d = 10$, die zu einer Fläche vom Grad 15 gelinkt ist. Mit der

Syzygienmethode schließlich, kann man alle bisher bekannten Flächen konstruieren. Dabei konstruiert man mit Hilfe von Syzygien spezielle Vektorbündel F, G mit $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang} G + 1$ und eine allgemeine Abbildung $\varphi : F \to G$. Wenn φ auf einer Fläche S im Rang abfällt, so hat diese Fläche Invarianten, die sich aus Invarianten von F und G ergeben. Falls S auch noch glatt ist, hat man eine neue Fläche gefunden. Zum Überprüfen der Dimensionsbedingung und der Glattheit verwendet man Computeralgebra Programme.

4. Endliche Körper

Computeralgebra Programme rechnen oft über kleinen endlichen Körpern. Dies hat zunächst praktische Gründe, da man Elemente aus kleinen endlichen Körpern leicht speichern kann. Während über endlichen Körpern alle Elemente mit gleich viel Speicherplatz auskommen, können Zähler und Nenner beim Rechnen über $\mathbb{Q}$ beliebig groß werden.
Ein weiter Vorteil ist jedoch, daß man über endlichen Körpern Gleichungssysteme leichter lösen kann. Oft kann man eine Nullstelle durch Raten finden:

Beispiel 4.1. Sei $f \in \mathbb{F}_p[x_1 \dots x_n]$ ein Polynom. Um eine Nullstelle zu finden, wählen wir $x_1, \dots, x_n$ zufällig. Heuristisch erhalten wir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{in ca. } \frac{1}{p} \text{ der Fälle} \\ \neq 0 & \text{in ca. } \frac{p-1}{p} \text{ der Fälle} \end{cases} .$$

Für eine exakte Version dieser Heuristik siehe [**vBS**].

In vielen Beispielen beobachtet man außerdem für Ideale $I \subset \mathbb{F}_p[x_1 \dots x_n]$ mit $V(I) \subset \mathbb{A}^n$ von Kodimension k, daß

$$\frac{\#\text{ Punkte in } V(I)}{\#\text{ Punkte in } \mathbb{A}^n} \approx \frac{1}{p^k}$$

ist. Wenn man also eine Varität kleiner Kodimension im $\mathbb{A}^n$ hat, so kann man über einem kleinen endlichen Körper hoffen, Punkte auf dieser Varietät durch Zufall zu finden.
Mit dieser Methode findet Schreyer [**Sch96**] vier Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs mit $d = 11$ und $\pi = 10$ über $\mathbb{F}_3$. Dabei realisiert er die Menge der Vektorbündel mit den gewünschten Invaritanten als Varität mit niedriger Kodimension in einem hochdimensionalen projektiven Raum und findet Beispiele durch zufälliges Suchen. Ebenso findet Abo 2003 (unveröffentlicht) eine rationale Fläche vom Grad 12 über $\mathbb{F}_5$.

5. Was ist mit Charakteristik 0 ?

Im Allgemeinen ist man nicht an Flächen über Körpern endlicher Charakteristik interessiert. Schreyer gibt jedoch in [**Sch96**] eine Methode an, mit der man von Lösungen eines Gleichungssystems in endlicher Charakteristik auf die Existenz von Lösungen in Charakteristik Null schließen kann.
Sei dazu X eine determinantielle Varietät über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ und $x \in X_{\mathbb{F}_p}$ ein spezieller Punkt. Falls nun $T_{X,x}$ von erwarteter Dimension ist, so ist X glatt in x und x liftet nach Charakteristik Null.
Zur Konstruktion von Flächen im $\mathbb{P}^4$ verwendet man als X das Hilbertschema der Flächen in $\mathbb{P}^4$ mit vorgegebenem Hilbertpolynom und als $x \in X_{\mathbb{F}_p}$ eine irgendwie konstruierte Fläche. Die Dimension des Tangentialraums $T_{X,x}$ berechnet man dann mit Hilfe von infinitisimalen Deformationen.

6. Unsere Fläche

Um neue rationale Flächen im $\mathbb{P}^4$ zu finden, haben wir versucht, explizite Linearsysteme auf $\mathbb{P}^2$ mit vorgegebenem Basisort über $\mathbb{F}_2$ durch Raten zu finden. Dabei kann man aus der Struktur des Basisorts die Invarianten der Fläche bestimmen:

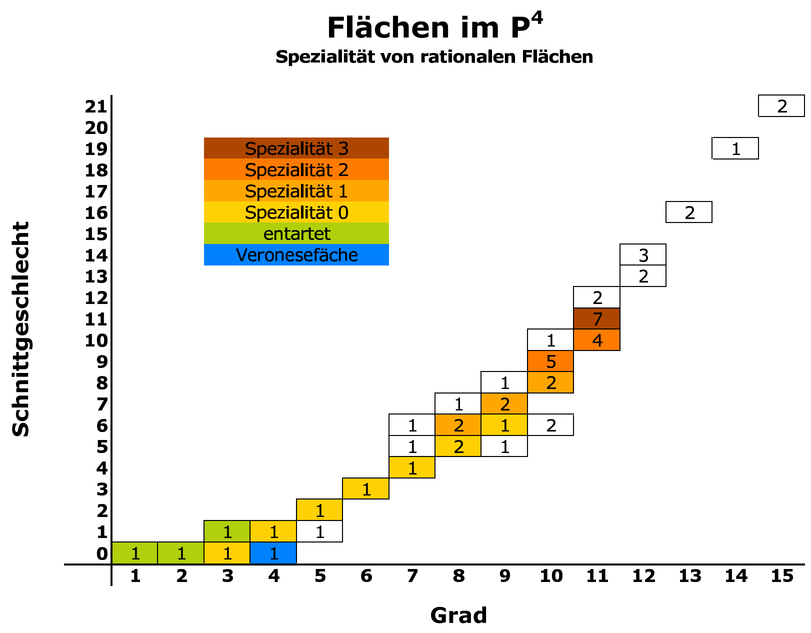
Beispiel 6.1. Gäbe es fünf Neuntiken durch einen Tripelpunkt, 14 Doppelpunkte und 5 Einfachpunkte, so würden diese eine Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ in den $\mathbb{P}^4$ abbilden. Falls dieses Bild eine glatte Fläche S wäre, müsste S rational mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ sein.

Die möglichen Linearsysteme zu vorgegebenen Invarianten d, π und K^2 findet man kombinatorisch. Wir verwenden ein Verfahren zur ganzahligen Optimierung mit Hilfe von Gröbner Basen [**CLO98**, Chapter 8]

Problem 6.2. *Für allgemeine Vielfachpunkte X erwartet man*

$$h^0(I_X(a)) = 5 - \underbrace{(d - \pi + 3)}_{\textit{Spezialität}}$$

viele linear unabhängige a-tiken mit Basisort X. In unserem Fall erwarten wir also nur 2 *und nicht* 5 *Neuntiken mit dem gewünschen Basisort. Folgende Graphik zeigt die bekannten Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs im $\mathbb{P}^4$ nach Grad und Schnittgeschlecht aufgetragen. Die Zahlen in den Kästchen geben an, wieviele Familien mit diesen Invarianten bekannt sind. Farbig unterlegt sind die Orte, zu deren Invarianten es rationale Flächen gibt.*



Lösung 1. Betrachte die Varität

$$X = \{(p,q,r) \mid h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5\} \subset \mathrm{Hilb}_1 \times \mathrm{Hilb}_{14} \times \mathrm{Hilb}_5 \,.$$

X hat erwartete Kodimension $5 \cdot \text{Spezialität} = 15$. Wir wählen also ca. $2^{15} = 32768$ zufällige Punkte $x = (p,q,r)$ in $\mathrm{Hilb}_1 \times \mathrm{Hilb}_{14} \times \mathrm{Hilb}_5$ und hoffen dann ein $x \in X$ zu finden.

Problem 6.3. *$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat nur 7 Punkte. Wir können also gar nicht einen Tripelpunkt, 14 Doppelpunkte und 5 Einfachpunkte mit rationalen Koordinaten über $\mathbb{F}_2$ wählen. Erst recht finden wir nicht 32768 verschiedene solche Punktkombinationen.*

Lösung 2. Wir wählen $s \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{2^k})$ und wenden Frobenius an. Wir erhalten dann ein Ideal von bis zu k Punkten, das über $\mathbb{F}_2$ definiert ist.

Mit diesen Ideen und dem Computeralgebra Programm Macaulay 2 [**GS**] haben wir tatsächlich einige spezielle

$$(p,q,r) \in \mathrm{Hilb}_1 \times \mathrm{Hilb}_{14} \times \mathrm{Hilb}_5 \quad \text{mit} \quad h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$$

gefunden. Ebenfalls mit Macaulay 2 kann man dann das Bild der durch die jeweiligen 5 Neuntiken definierten rationalen Abbildung

$$\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$$

ausrechnen. Mehrfach erhalten wir glatte Flächen mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ über $\mathbb{F}_2$.
Mit Macaulay konnten wir außerdem ausrechnen, daß man die 20 Basispunkte genau in einem 15-kodimensionalen Raum infinitisimal verschieben kann, ohne daß die Bedingung $h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$ verloren geht. Dies zeigt, daß $T_{X,x}$ von erwarteter Kodimension ist und die Konfiguration der Basispunkte nach Charakteristik Null liftet und dort ebenfalls $h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$ erfüllt. Wir erhalten also auch über Charakteristik Null rationale Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4.$$

die durch Neuntiken mit dem gewünschten Basisort definiert sind. Da die Bedingung "Bild von φ ist eine glatte Fläche" offen auf $X/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist und wir Beispiele mit diesen Eigenschaften über $\mathbb{F}_2$ gefunden haben, muss es auch über Charakteristik Null solche Abbildungen φ geben, deren Bild eine glatte rationale Fläche mit den gewünschten Invarianten ist.

7. Warum sind diese Flächen neu?

Außer der von uns konstruierten Flächen gibt es noch mindestens drei weitere Familien rationaler Flächen mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ im $\mathbb{P}^4$. Diese haben jeweils $0, 1$ oder ∞-viele 6-Sekanten [**DES93**]. Unsere Flächen haben jedoch zwei 6-Sekanten. Außerdem haben unsere Flächen Postulation $s = 4$ während die drei bisher bekannten Familien Postulation $s = 5$ haben.

References

[ADH+97] A. Aure, W. Decker, K. Hulek, S. Popescu & K. Ranestad – Syzygies of abelian and bielliptic surfaces in $\mathbf{P}^4$, *Internat. J. Math.* **8** (1997), no. 7, 849–919.

[ADS98] H. Abo, W. Decker & N. Sasakura – An elliptic conic bundle in $\mathbf{P}^4$ arising from a stable rank-3 vector bundle, *Math. Z.* **229** (1998), no. 4, 725–741.

[AR02] M. Abo & K. Ranestad – Irregular elliptic surfaces of degree 12 in the projective fourspace, 2002.

[Aur90] A. B. Aure – The smooth surfaces on cubic hypersurface in $\mathbf{P}^4$ with isolated singularities, *Math. Scand.* **67** (1990), no. 2, 215–222.

[BF94] R. Braun & G. Fløystad – A bound for the degree of smooth surfaces in $\mathbf{P}^4$ not of general type, *Compositio Math.* **93** (1994), no. 2, 211–229.

[CLO98] D. Cox, J. Little & D. O'Shea – *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 185, Springer-Verlag, New York, 1998.

[DES93] W. Decker, L. Ein & F.-O. Schreyer – Construction of surfaces in $\mathbf{P}_4$, *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), no. 2, 185–237.

[DS00] W. Decker & F.-O. Schreyer – Non-general type surfaces in $\mathbf{P}^4$: some remarks on bounds and constructions, *J. Symbolic Comput.* **29** (2000), no. 4-5, 545–582, Symbolic computation in algebra, analysis, and geometry (Berkeley, CA, 1998).

[EP89] G. Ellingsrud & C. Peskine – Sur les surfaces lisses de $\mathbf{P}_4$, *Invent. Math.* **95** (1989), no. 1, 1–11.

[GS] D. Grayson & M. Stillman – Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry, Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2`.

[Har77] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Koe92] L. Koelblen – Surfaces de $\mathbf{P}_4$ tracées sur une hypersurface cubique, *J. Reine Angew. Math.* **433** (1992), 113–141.

[PR96] S. Popescu & K. Ranestad – Surfaces of degree 10 in the projective fourspace via linear systems and linkage, *J. Algebraic Geom.* **5** (1996), no. 1, 13–76.

[Rot37] L. Roth – On the projective classification of surfaces, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1937), 143–170.

[Sch96] F.-O. Schreyer – Small fields in constructive algebraic geometry, Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 179, Dekker, New York, 1996, 221–228.

[vBS] H.-C. G. v. Bothmer & F. Schreyer – A quick and dirty irreducibility test for multivariate polynomials over $\mathbb{F}_q$, Work in progress.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 201–209
Universität Göttingen, 2003-04

ARITHMETIC HIRZEBRUCH-ZAGIER DIVISORS AND MODULAR FORMS

J. H. Bruinier
Mathematisches Institut, Universität zu Köln, Weyertal 86–90, D-50931 Köln, Germany • *E-mail :* bruinier@math.uni-koeln.de

Abstract. We report on recent work on arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors on Hilbert modular surfaces. These divisors can be viewed as the coefficients of an elliptic modular form of weight two with values in an arithmetic Chow group in analogy to the classical result of Hirzebruch and Zagier. The intersection of this modular form with the second power of the line bundle of modular forms equipped with the Petersson metric can be determined. In particular we obtain the arithmetic self intersection number of the line bundle of modular forms.

1. Introduction

In 1976 Hirzebruch and Zagier showed that the intersection numbers of certain special divisors, nowadays called Hirzebruch-Zagier divisors, on Hilbert modular surfaces can be interpreted as the Fourier coefficients of holomorphic elliptic modular forms of weight two [**HZ76**]. Their discovery triggered a lot of further research in that direction. For instance, Oda considered similar cycles for the orthogonal group $\mathrm{O}(2, n)$ [**Oda78**], and Kudla and Millson studied

January 22nd, 2004.

special cycles for the orthogonal group $\mathrm{O}(p,q)$ and the unitary group $\mathrm{U}(p,q)$ in great generality by means of the Weil representation, see e.g. [**KM90**].

Inspired by the work of Gross and Keating [**GK93**] on the arithmetic intersection of three modular correspondences, Kudla proved that the intersection numbers of certain arithmetic divisors on a regular model of a Shimura curve can be interpreted as the coefficients of the derivative of a Siegel Eisenstein series of genus 2 [**Kud97**]. In subsequent work Kudla, Rapoport, and Yang developed a broad conjectural picture relating arithmetic intersection numbers of special arithmetic divisors on regular models of Shimura varieties of orthogonal type to modular forms, in particular to (derivatives of) Eisenstein series. In special cases they obtained results that strongly support these conjectures [**Kud02b**], [**Kud02a**], [**Kud**], [**KRY99**]. For instance, for Shimura curves the results are quite complete.

One conclusion of this work is that the complex geometric results of Hirzebruch and Zagier and their generalizations should have arithmetic analogues over $\mathbb{Z}$. Here the classical intersection theory has to be replaced by Arakelov intersection theory.

In the present note we briefly report on joint work with J. Burgos, J. Kramer, and U. Kühn on arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors on Hilbert modular surfaces and their relationship to elliptic modular forms [**BBK03**]. Since these surfaces are examples of *non-compact* Shimura varieties, we have to work with the extended arithmetic intersection theory developed in [**BKK03**], [**BKK**] (see the article of U. Kühn in this volume). This causes some technical complications, but, on the other hand, allows us to take advantage of the q-expansion principle, which provides a strong link between analysis and arithmetic.

2. Hilbert modular surfaces

For details we refer to the books [**Fre90**], [**vdG88**], [**Gor02**]. Let K be a real quadratic field and write $D > 0$ for its discriminant. Throughout we assume that D is a prime. This implies that the class number h_K is odd. We write $\mathscr{O}_K$ for the ring of integers of K, $\mathfrak{d} = (\sqrt{D})$ for the different, and $x \mapsto x'$ for the conjugation in K. Moreover, we write $\Gamma_K = \mathrm{SL}_2(\mathscr{O}_K)$ for the Hilbert modular group corresponding to K. We may view it as a discrete subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2$ acting on $\mathbb{H}^2$, the product of two copies of the upper complex half plane $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \Im(z) > 0\}$, via Moebius transformations, i.e., $M(z_1,z_2) = (\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{a'z_2+b'}{c'z_2+d'})$ for $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_K$, and $(z_1,z_2) \in \mathbb{H}^2$. The quotient $Y_K = \Gamma_K \backslash \mathbb{H}^2$ is a non-compact complex space, which can be compactified by adding h_K points, the so-called cusps. In that way we obtain a compact normal complex space X_K, the Baily-Borel compactification of Y_K. The spaces Y_K and X_K are actually (quasi-) projective algebraic and defined over $\mathbb{Q}$. The singularities of X_K lie at the cusps and the elliptic fixed points. By the work of Hironaka and Hirzebruch there exists a desingularization $\widetilde{X}_K \to X_K$.

To study the geometry of these *Hilbert modular surfaces* we are interested in rational functions on X_K and a bit more generally in Hilbert modular forms. Recall that a meromorphic (respectively holomorphic) function f on $\mathbb{H}^2$ is called a Hilbert modular form (respectively a holomorphic Hilbert modular form) of weight k for the group Γ_K, if it satisfies the transformation law

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(z_1, z_2)\right) = (cz_1 + d)^k (c'z_2 + d')^k f(z_1, z_2) \tag{2.1}$$

for all $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_K$. Hilbert modular forms of weight 0 can be identified with rational functions on X_K. Hilbert modular forms of weight k can be viewed as rational sections of the line bundle $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ of modular forms of weight k on $\widetilde{X}_K$.

There exists a family of special divisors on Hilbert modular surfaces. This is typical for Shimura varieties of orthogonal or unitary type. (Recall that $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2$ is essentially isomorphic to the real orthogonal group of signature $(2,2)$. The Hilbert modular group can be viewed as the orthogonal group of a suitable lattice of signature $(2,2)$.) Let m be a positive integer. Then

$$T(m) = \sum_{\substack{(a,b,\lambda)\in(\mathbb{Z}^2\times\mathfrak{d}^{-1})/\{\pm 1\} \\ ab-\lambda\lambda'=m/D}} \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2; \quad a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0\}$$

defines a Γ_K-invariant analytic divisor on $\mathbb{H}^2$. It descends to an algebraic divisor on Y_K, the *Hirzebruch-Zagier divisor* of discriminant m. Moreover, we obtain Hirzebruch-Zagier divisors on X_K by taking the closure of $T(m)$, and on $\widetilde{X}_K$ by taking the pullback with respect to the desingularization morphism. It is well known that $T(m) = \emptyset$ if and only if $\chi_D(m) = -1$, where $\chi_D = (\frac{D}{\cdot})$ denotes the quadratic character corresponding to $K/\mathbb{Q}$.

3. Geometric generating series

If X is a regular projective algebraic variety over $\mathbb{C}$, we write $\mathrm{CH}^1(X)$ for its first Chow group, that is, the group of algebraic divisors on X modulo rational equivalence. Moreover, we put $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

It is our goal to describe the position of the Hirzebruch-Zagier divisors in $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$. To this end we consider the generating series

$$A(\tau) = \mathrm{c}_1(\mathscr{M}_{-1/2}(\mathbb{C})) + \sum_{m>0} T(m) q^m \in \mathbb{Q}[[q]]^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}, \tag{3.1}$$

where $q = e^{2\pi i \tau}$ for $\tau \in \mathbb{H}$, and $\mathrm{c}_1(\mathscr{M}_k(\mathbb{C}))$ denotes the first Chern class of the line bundle of modular forms of weight k.

The result of Hirzebruch and Zagier mentioned in the introduction relates this generating series to elliptic modular forms (see e.g. [**Shi71**]). We denote by $M_k(D, \chi_D)$ the space of holomorphic modular forms of weight k for the Hecke group

$$\Gamma_0(D) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); \quad c \equiv 0 \pmod{D} \right\} \tag{3.2}$$

with character χ_D. Any such modular form $f \in M_k(D, \chi_D)$ has a Fourier expansion of the form $f = \sum_{n \geqslant 0} c(n) q^n$. We let $M_k^+(D, \chi_D)$ be the subspace of those $f \in M_k(D, \chi_D)$, whose Fourier coefficients $c(n)$ satisfy the so-called plus space condition, i.e., $c(n) = 0$ whenever $\chi_D(n) = -1$.

Theorem 3.1 **(Hirzebruch and Zagier).** *The Hirzebruch-Zagier divisors generate a subspace of* $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ *of dimension* $\leqslant \dim(M_2^+(D, \chi_D))$. *The generating series* $A(\tau)$ *is a modular form in* $M_2^+(D, \chi_D)$ *with values in* $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$, *i.e.,*

$$A(\tau) \in M_2^+(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}.$$

So if λ is a linear functional on $\mathrm{CH}^1(\widetilde{X}_K)_{\mathbb{Q}}$, then

$$\lambda\left(\mathrm{c}_1(\mathscr{M}_{-1/2}(\mathbb{C}))\right) + \sum_{m>0} \lambda(T(m)) q^m \in M_2^+(D, \chi_D).$$

Typical linear functionals are given by the intersection pairing with a fixed divisor on $\widetilde{X}_K$. Hirzebruch and Zagier actually proved the theorem in a slightly different form by explicitly computing the intersection numbers of $T(m)$ with other Hirzebruch-Zagier divisors and with the exceptional divisors above the cusps. In [**Bor99**] Borcherds provided a different proof using automorphic products.

If we take for λ the intersection with $\mathrm{c}_1(\mathscr{M}_k(\mathbb{C}))$, we find that

$$A(\tau) \cdot \mathrm{c}_1(\mathscr{M}_k(\mathbb{C})) \in M_2^+(D, \chi_D).$$

It turns out that this modular form is precisely the (up to a scalar factor unique) Eisenstein series in the space $M_2^+(D, \chi_D)$ (see [**Fra77**], [**Hau79**]).

***Theorem 3.2* (Franke and Hausmann).** *We have*

$$A(\tau)\cdot \mathrm{c}_1(\mathscr{M}_k(\mathbb{C})) = -\frac{k}{2}\zeta_K(-1)\cdot E_2^+(\tau),$$

where $\zeta_K(s)$ *is the Dedekind zeta function of* K*, and* $E_2^+(\tau)$ *denotes the Eisenstein series*

$$E_2^+(\tau) = 1 + \frac{2}{L(-1,\chi_D)}\sum_{n\geqslant 1}\sum_{d|n} d\left(\chi_D(d)+\chi_D(n/d)\right)q^n \in M_2^+(D,\chi_D). \tag{3.3}$$

In particular, the geometric self intersection number of the line bundle of modular forms $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ *on* $\widetilde{X}_K$ *is given by* $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})^2 = k^2\zeta_K(-1)$.

4. Arithmetic generating series

It is well known that the Hilbert modular surface Y_K has a moduli interpretation. It parametrizes isomorphism classes of triples (A,ι,ψ), where A is an abelian surface over $\mathbb{C}$, ι is an $\mathscr{O}_K$-multiplication, that is, a ring homomorphism $\mathscr{O}_K \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$, and ψ is a $\mathfrak{d}^{-1}$-polarization, that is, an isomorphism of $\mathscr{O}_K$-modules $\mathfrak{d}^{-1}\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_K}(A,A^\vee)^{\mathrm{sym}}$ from the inverse different $\mathfrak{d}^{-1}$ to the module of $\mathscr{O}_K$-linear symmetric homomorphisms, taking the totally positive elements of $\mathfrak{d}^{-1}$ to $\mathscr{O}_K$-linear polarizations (see [**Gor02**] Chapter 2).

This moduli interpretation can be used to construct a model of Y_K over $\mathbb{Z}$. By the work of Rapoport [**Rap78**], Deligne, and Pappas [**DP94**] it is known that the moduli problem over an arbitrary base scheme over $\mathbb{Z}$ is represented by a regular algebraic stack $\mathscr{H}$, which is flat and of relative dimension two over $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. It is smooth over $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/D]$. The corresponding complex variety $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ is isomorphic to Y_K.

For $k\in\mathbb{Z}$ sufficiently divisible there exists a line bundle $\mathscr{M}_k$ on $\mathscr{H}$ such that the induced bundle on $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ can be identified with the line bundle $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ of Hilbert modular forms of weight k for Γ_K of the previous section. By the q-expansion principle and the Koecher principle, the global sections of $\mathscr{M}_k$ can be identified with holomorphic Hilbert modular forms of weight k for Γ_K with integral rational Fourier coefficients. The scheme

$$\overline{\mathscr{H}} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_k H^0(\mathscr{H},\mathscr{M}_k)\right)$$

can be regarded as an arithmetic Baily-Borel compactification of the coarse moduli space corresponding to $\mathscr{H}$. It is normal, projective, and flat over $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ (see [**Cha90**]). The corresponding complex variety $\overline{\mathscr{H}}(\mathbb{C})$ is isomorphic to X_K.

To simplify the exposition, for the rest of this note we make the following

Assumption 4.1. *There exists a desingularization $\pi : \widetilde{\mathscr{X}}_K \to \overline{\mathscr{H}}$ by a regular scheme $\widetilde{\mathscr{X}}_K$, which is projective and flat over $\mathbb{Z}$, such that the regular locus $\overline{\mathscr{H}}^{reg}$ is fiber-wise dense in $\widetilde{\mathscr{X}}_K$, and such that the induced morphism $\widetilde{\mathscr{X}}_K(\mathbb{C}) \to X_K$ is a desingularization as in the previous sections $\widetilde{X}_K$.*

It is not known whether such an arithmetic variety $\widetilde{\mathscr{X}}_K$ exists. However, if we consider an additional level structure to rigidify the moduli problem, then there exist such arithmetic varieties over certain subrings of cyclotomic fields. To get unconditional results one can work with these (as it is done in [**BBK03**]).

An important invariant of an arithmetic variety $\mathscr{X}$ is its first arithmetic Chow group $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathscr{X})$, that is, the group of arithmetic divisors modulo rational equivalence. Recall that an arithmetic divisor on $\mathscr{X}$ is a pair (y, g_y), where $y \subset \mathscr{X}$ is a divisor, and g_y is a certain Green function for the induced divisor $y(\mathbb{C})$ on the corresponding complex variety $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ (see [**Sou92**], [**BKK03**]).

On our arithmetic Hilbert modular surface we consider the following arithmetic divisors. One can show that $T(m)$ is defined over $\mathbb{Q}$. We obtain a divisor $\mathscr{T}(m)$ on $\widetilde{\mathscr{X}}_K$ by taking the Zariski closure of the divisor on the generic fiber. In [**Bru99**] a certain automorphic Green function $G_m(z_1, z_2)$ for $T(m)$ was constructed. (See [**BBK03**] Definition 2.13 for the appropriate additive normalization.) One can view this Green function as the regularized theta lift of a certain Maass wave form of weight 0 for $\Gamma_0(D)$ with singularities at the cusps [**Bru02**]. The pair

$$\widehat{\mathscr{T}}(m) = (\mathscr{T}(m), G_m)$$

defines an arithmetic divisor on $\widetilde{\mathscr{X}}_K$, called the arithmetic Hirzebruch-Zagier divisor of discriminant m. The Green function G_m has a logarithmic singularity along $T(m)$ and in addition log-log singularities along the exceptional divisor of $\widetilde{X}_K$. Therefore $\widehat{\mathscr{T}}(m)$ naturally lives in the extended Chow group $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}}_K, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})$ of $\widetilde{\mathscr{X}}_K$ with pre-log-log growth along the exceptional divisor of $\widetilde{X}_K$ in the sense of [**BKK03**]. This is indicated by the additional argument $\mathscr{D}_{\mathrm{pre}}$.

We also obtain an element of $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}}_K, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})$ by taking the first arithmetic Chern class $\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_k)$ of the hermitian line bundle $\overline{\mathscr{M}}_k$ of Hilbert modular forms equipped with the Petersson metric. Recall that the Petersson metric of a Hilbert modular form F of weight k is given by

$$\|F(z_1, z_2)\|_{\mathrm{Pet}} = |F(z_1, z_2)| \big(16\pi^2 \Im(z_1)\Im(z_2)\big)^{k/2}.$$

This defines a hermitian metric on $\mathscr{M}_k(\mathbb{C})$ which has logarithmic singularities along the exceptional divisor of $\widetilde{X}_K$.

We would like to describe the positions of the arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors in $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}_K}, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$. Similarly as in the previous section we consider the generating series

$$\widehat{A}(\tau) = \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_{-1/2}) + \sum_{m>0} \widehat{\mathscr{T}}(m) q^m. \tag{4.1}$$

Under the Assumption 4.1 the main results of [**BBK03**] imply the following theorems.

Theorem 4.2. *The arithmetic Hirzebruch-Zagier divisors $\widehat{\mathscr{T}}(m)$ generate a subspace of $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}_K}, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$ of dimension $\dim(M_2^+(D,\chi_D))$. The generating series $\widehat{A}(\tau)$ is a modular form in $M_2^+(D,\chi_D)$ with values in $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}_K}, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}$, i.e.,*

$$\widehat{A}(\tau) \in M_2^+(D,\chi_D) \otimes_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathrm{CH}}^1(\widetilde{\mathscr{X}_K}, \mathscr{D}_{\mathrm{pre}})_{\mathbb{Q}}.$$

In analogy to the result of Franke and Hausmann it is interesting to study the arithmetic intersection of $\widehat{A}(\tau)$ with $\overline{\mathscr{M}}_k^2$.

Theorem 4.3. *We have the following identities of arithmetic intersection numbers:*

$$\widehat{A}(\tau) \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathscr{M}}_k)^2 = \frac{k^2}{2}\zeta_K(-1)\left(\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log(D)\right) \cdot E_2^+(\tau), \tag{4.2}$$

where $\zeta_K(s)$ denotes the Dedekind zeta function of K, $\zeta(s)$ the Riemann zeta function, and $E_2^+(\tau)$ the Eisenstein series defined in (3.3)*. In particular, the arithmetic self intersection number of $\overline{\mathscr{M}}_k$ is given by:*

$$\overline{\mathscr{M}}_k^3 = -k^3\zeta_K(-1)\left(\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log(D)\right). \tag{4.3}$$

Formula (4.3) provides further evidence for conjectures of Kramer, Maillot-Roessler, and Kudla relating arithmetic self intersection numbers on Shimura varieties to logarithmic derivatives of L-functions.

The proofs of these results rely, among other things, on the arithmetic and geometric properties of Borcherds' regularized theta lift [**Bor95**], [**Bor98**], its generalization to weak Maass forms in [**Bru99**], [**Bru02**], results on the existence of "many" Borcherds products, the q-expansion principle, and the computation of similar arithmetic intersection numbers on modular curves in [**Bos98**], [**Küh01**].

References

[BBK03] J. Bruinier, J. Burgos & U. Kühn – Borcherds products and arithmetic intersection theory on Hilbert modular surfaces, 2003, arXiv.org/abs/math.NT/0310201.

[BKK] J. Burgos, J. Kramer & U. Kühn – Arithmetic characteristic classes of automorphic vector bundles, in preparation.

[BKK03] ———, Cohomological Arithmetic Chow groups, 2003, arXiv.org/math.AG/0404122.

[Bor95] R. E. Borcherds – Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbf{R})$ and infinite products, *Invent. Math.* **120** (1995), no. 1, 161–213.

[Bor98] ———, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.* **132** (1998), no. 3, 491–562.

[Bor99] ———, The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, *Duke Math. J.* **97** (1999), no. 2, 219–233.

[Bos98] J.-B. Bost – Intersection theory on arithmetic surfaces and L^2_1-metrics, 1998, letter.

[Bru99] J. H. Bruinier – Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors, *Invent. Math.* **138** (1999), no. 1, 51–83.

[Bru02] J. H. Bruinier – *Borcherds products on O(2, l) and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1780, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Cha90] C.-L. Chai – Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli spaces, *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 3, 541–554.

[DP94] P. Deligne & G. Pappas – Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant, *Compositio Math.* **90** (1994), no. 1, 59–79.

[Fra77] H.-G. Franke – *Kurven in Hilbertschen Modulflächen und Humbertschen Flächen im Siegel-Raum*, Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 104, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1977, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1977.

[Fre90] E. Freitag – *Hilbert modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[GK93] B. H. Gross & K. Keating – On the intersection of modular correspondences, *Invent. Math.* **112** (1993), no. 2, 225–245.

[Gor02] E. Z. Goren – *Lectures on Hilbert modular varieties and modular forms*, CRM Monograph Series, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Hau79] W. Hausmann – *Kurven auf Hilbertschen Modulflächen*, Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 123, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1979, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1979.

[HZ76] F. Hirzebruch & D. Zagier – Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, *Invent. Math.* **36** (1976), 57–113.

[KM90] S. S. Kudla & J. J. Millson – Intersection numbers of cycles on locally symmetric spaces and Fourier coefficients of holomorphic modular forms in several complex variables, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1990), no. 71, 121–172.

[KRY99] S. S. Kudla, M. Rapoport & T. Yang – On the derivative of an Eisenstein series of weight one, *Internat. Math. Res. Notices* (1999), no. 7, 347–385.

[Kud] S. S. Kudla – Special cycles and derivatives of Eisenstein series, Proceeding of the MSRI workshop on special values of Rankin L-series, to appear, `arXiv.org/math.NT/0308295`.

[Kud97] ———, Central derivatives of Eisenstein series and height pairings, *Ann. of Math. (2)* **146** (1997), no. 3, 545–646.

[Kud02a] ———, Derivatives of Eisenstein series and arithmetic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, 173–183.

[Kud02b] ———, Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles, *Astérisque* (2002), no. 276, 341–368, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[Küh01] U. Kühn – Generalized arithmetic intersection numbers, *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), 209–236.

[Oda78] T. Oda – On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, *Math. Ann.* **231** (1977/78), no. 2, 97–144.

[Rap78] M. Rapoport – Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal, *Compositio Math.* **36** (1978), no. 3, 255–335.

[Shi71] G. Shimura – *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971.

[Sou92] C. Soulé – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.

[vdG88] G. van der Geer – *Hilbert modular surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 211–220
Universität Göttingen, 2003-04

VARIETIES WITH FINITELY GENERATED TOTAL COORDINATE RING

J. Hausen
Mathematisches Forschungsinstitut, 77709 Oberwolfach, Germany
E-mail : hausen@mfo.de

Abstract. We present a combinatorial approach to geometrical properties of varieties with finitely generated total coordinate ring. For example, it allows to investigate singularities, the Picard group and the ample cone. Our approach generalizes the combinatorial description of toric varieties.

1. Total coordinate rings

In this talk, I report on the joint paper [**BH**] with Florian Berchtold. We consider varieties with a finitely generated total coordinate ring, and the aim is to provide a combinatorial approach to geometric properties of these varieties in terms of combinatorial data living in their divisor class group.

To begin, let us briefly recall the concept of the total coordinate ring. Let X be a normal variety over an algebraically closed field $\mathbb{K}$. We assume that the divisor class group $\mathrm{Cl}(X)$, i.e., the group of Weil divisors modulo principal divisors, is free and finitely generated.

January 28th, 2004.

Now, choose a subgroup $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ of the group of Weil divisors such that the canonical map $K \to \mathrm{Cl}(X)$ is an isomorphism. Then, for any two $D_1, D_2 \in K$, the multiplication in the function field $\mathbb{K}(X)$ gives a map

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D_1)) \otimes_{\mathbb{K}} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D_2)) \;\to\; \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D_1 + D_2)).$$

This allows us to establish a multiplicative structure on the direct sum over all the vector spaces of global sections, and the result is the *total coordinate ring* of X:

$$\mathscr{R}(X) \;:=\; \bigoplus_{D \in K} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)).$$

This definition depends on the choice of the group $K \subset \mathrm{Cl}(X)$, but the total coordinate ring $\mathscr{R}(X)$ is unique up to isomorphism, which at least partially justifies the notation. It turns out that $\mathscr{R}(X)$ is a unique factorization domain, see [**BH03**] and [**EKiW**].

We will be concerned with the case that $\mathscr{R}(X)$ is finitely generated. For example this is known to hold for all log Fano varieties of dimension at most three, and for all unirational varieties admitting a linear algebraic group action of complexity at most one, e.g. toric varieties.

Similar to the theory of toric varieties, the philosophy of [**BH**] is to start with a given set of data — here these are a multigraded ring R together with a combinatorial structure living in its grading group K — and then to construct from these data a variety X.

The variety X has the grading group K as its divisor class group $\mathrm{Cl}(X)$ and the ring R as its total coordinate ring $\mathscr{R}(X)$. The task is to read off further geometric properties of the variety X from the defining combinatorial data living in $K = \mathrm{Cl}(X)$.

2. Bunched rings

We introduce the language of bunched rings. Roughly speaking, such a bunched ring is a finitely generated multigraded factorial $\mathbb{K}$-algebra together with a certain collection of pairwise overlapping polyhedral cones living in the grading group.

Here are the precise definitions. Let K be a lattice, i.e., a free finitely generated abelian group, and consider a K-graded finitely generated factorial $\mathbb{K}$-algebra

$$R \;=\; \bigoplus_{w \in K} R_w.$$

Fix a system $\mathfrak{F} = (f_1, \dots, f_r)$ of homogeneous pairwise nonassociated prime generators of R. We suppose that the degrees $w_i := \deg(f_i)$ generate the lattice K.

The *projected cone* associated to $\mathfrak{F}$ is the pair $(E \xrightarrow{Q} K, \gamma)$, where $E := \mathbb{Z}^r$, the linear map $Q\colon E \to K$ sends the i-th canonical base vector e_i to $w_i = \deg(f_i)$ and $\gamma = \mathrm{cone}(e_1, \dots, e_r)$ is the positive orthant in $E_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E$. By a *projected face* we mean the image $Q(\gamma_0)$ of a face $\gamma_0 \preceq \gamma$. We say that $\gamma_0 \preceq \gamma$ is an $\mathfrak{F}$*-face* if there is a point $x \in \mathrm{Spec}(R)$ such that

$$f_i(x) \neq 0 \iff e_i \in \gamma_0.$$

By an $\mathfrak{F}$*-bunch* we mean a nonempty collection Φ of projected $\mathfrak{F}$-faces such that the following conditions are satisfied:

- a projected $\mathfrak{F}$-face τ belongs to Φ if and only if for each $\tau \neq \sigma \in \Phi$ we have $\emptyset \neq \tau^\circ \cap \sigma^\circ \neq \sigma^\circ$,
- for each facet $\gamma_0 \preceq \gamma$ there is a $\tau \in \Phi$ such that $Q(\gamma_0)^\circ \supset \tau^\circ$ holds and $Q(\gamma_0 \cap E)$ generates the lattice K.

Here τ° denotes the relative interior of a cone τ. Note that the first condition ensures irredundance in the sense that no $\tau \in \Phi$ is contained in some other $\tau' \in \Phi$, and maximality in the sense that any projected $\mathfrak{F}$-face that is compatible with all elements of Φ actually belongs to Φ.

Definition 2.1. A *bunched ring* is a triple $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$, where

(i) R is a finitely generated factorial $\mathbb{K}$-algebra, graded by a finite dimensional lattice K such that $R_0^* = \mathbb{K}^*$ holds,
(ii) $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_r\}$ is a system of homogeneous pairwise nonassociated prime generators of R,
(iii) Φ is an $\mathfrak{F}$-bunch in the projected cone $(E \xrightarrow{Q} K, \gamma)$ associated to the system of generators $\mathfrak{F}$.

Example 2.2. We consider the homogeneous coordinate ring of the Grassmannian $G(2,4)$, and define a grading by $K := \mathbb{Z}^3$ on it: let

$$R \;=\; \mathbb{K}[T_1, \dots, T_6]/\langle T_1T_6 - T_2T_5 + T_3T_4\rangle.$$

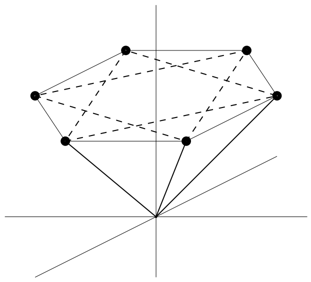
Recall that this is a factorial $\mathbb{K}$-algebra. We obtain a K-grading by prescribing degrees $w_i := \deg(T_i)$ for the generators as follows:

$$\begin{array}{lll} w_1 := (1,0,1), & w_2 := (1,1,1), & w_3 := (0,1,1), \\ w_4 := (0,-1,1), & w_5 := (-1,-1,1), & w_6 := (-1,0,1). \end{array}$$

Note that the defining relation of R is in fact homogeneous, and thus everything is well defined. Next consider the cones

$$\begin{array}{ll} \tau_1 := \mathrm{cone}(w_1, w_3, w_5), & \tau_2 := \mathrm{cone}(w_2, w_4, w_6), \\ \tau_3 := \mathrm{cone}(w_1, w_6, w_2, w_5), & \tau_4 := \mathrm{cone}(w_1, w_6, w_3, w_4), \\ \tau_5 := \mathrm{cone}(w_2, w_5, w_3, w_4). & \end{array}$$

It is obvious that these are projected $\mathfrak{F}$-faces, and they form an $\mathfrak{F}$-bunch Φ. So, we obtained a bunched ring $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$.



3. The variety associated to a bunched ring

To any bunched ring $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ we will now associate a certain normal variety $X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$. This variety is constructed as a quotient of an open subset of $\mathrm{Spec}(R)$ by the torus action arising from the K-grading of R. As we will see, the construction generalizes Cox's quotient presentation for toric varieties [**Cox95**].

Fix a bunched ring $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$, and let $(E \xrightarrow{Q} K, \gamma)$ denote the projected cone associated to the system of generators $\mathfrak{F} = (f_1, \dots, f_r)$. We work in terms of the following collections of faces of the cone $\gamma \subset E_{\mathbb{Q}}$:

- The collection $\mathrm{rlv}(\Phi)$ of *relevant faces* consists of those $\mathfrak{F}$-faces $\gamma_0 \preceq \gamma$ such that $Q(\gamma_0)^\circ \supset \tau^\circ$ holds for some $\tau \in \Phi$.
- The *covering collection* $\mathrm{cov}(\Phi)$ of Φ is the set consisting of all minimal cones of $\mathrm{rlv}(\Phi)$.

We start with the affine variety $\overline{X} := \mathrm{Spec}(R)$. It comes along with an action of the torus $T := \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[K])$, induced by the K-grading of the ring R. Consider the following T-invariant open subset:

$$\widehat{X} = \bigcup_{\gamma_0 \in \mathrm{rlv}(\Phi)} \overline{X}_{\gamma_0}, \qquad \text{where } \overline{X}_{\gamma_0} = \overline{X}_{f^u} \text{ for some } u \in \gamma_0^\circ.$$

Here we used the notation $f^u := f_1^{u_1} \dots f_r^{u_r}$ for $u \in E = \mathbb{Z}^r$. Note that the open affine subsets $\overline{X}_{\gamma_0} \subset \overline{X}$ do not depend on the particular choices of the lattice vectors $u \in \gamma_0^\circ$. For every $\gamma_0 \in \mathrm{rlv}(\Theta)$, we have a good quotient

$$\overline{X}_{\gamma_0} \;\to\; \overline{X}_{\gamma_o} /\!\!/ T := \mathrm{Spec}(R_0).$$

Proposition 3.1. *The good quotients $\overline{X}_{\gamma_0} \to \overline{X}_{\gamma_o} /\!\!/ T$ glue together to a good quotient $\widehat{X} \to \widehat{X} /\!\!/ T$ for the T-action on $\widehat{X}$.*

*Proof***.** First consider any two cones $\gamma_i, \gamma_j \in \mathrm{rlv}(\Phi)$. By the definition of $\mathrm{rlv}(\Phi)$, the intersection $Q(\gamma_i)^\circ \cap Q(\gamma_j)^\circ$ is nonempty. Thus, we find $u^i \in \gamma_i^\circ$ and $u^j \in \gamma_j^\circ$ with $Q(u^i) = Q(u^j)$. Let $f_i, f_j \in R$ denote the functions corresponding to u^i, u^j, and set

$$\overline{X}_i := \overline{X}_{\gamma_i} = \overline{X}_{f_i}, \quad \overline{X}_{ij} := \overline{X}_i \cap \overline{X}_j = \overline{X}_{f_i f_j}, \qquad X_i := \overline{X}_i /\!\!/ T, \quad X_{ij} := \overline{X}_{ij}.$$

Then we obtain a commutative diagram where the upper horizontal maps are open embeddings, the downwards maps are good quotients for the respective T-actions, and the lower horizontal arrows indicate the induced morphisms of the affine quotient spaces:

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}_i \arrow[d, "/\!\!/ T"] & \overline{X}_{ij} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "/\!\!/ T"] & \overline{X}_j \arrow[d, "/\!\!/ T"] \\
X_i & X_{ij} \arrow[l] \arrow[r] & X_j
\end{tikzcd}$$

By the choice of f_i and f_j, the quotient f_j/f_i is an invariant function on $\overline{X}_i$, and the inclusion $\overline{X}_{ij} \subset \overline{X}_i$ is just the localization by f_j/f_i. Since f_j/f_i is invariant, the latter holds as well for the quotient spaces; that means that the map $X_{ij} \to X_i$ is localization by f_j/f_i. In particular, $X_{ij} \to X_i$ are open embeddings.

We may glue the maps $\overline{X}_i \to X_i$ along $\overline{X}_{ij} \to X_{ij}$; the necessary cocycle conditions for glueing are satisfied. The result is the desired good quotient $\widehat{X} \to \widehat{X} /\!\!/ T$ for the T-action. Note that the quotient space is separated, because the multiplication maps $\mathscr{O}(X_i) \otimes \mathscr{O}(X_j) \to \mathscr{O}(X_{ij})$ are surjective. $\square$

Let us remark that for this construction it would have been sufficent to work with the cones of the covering collection $\mathrm{cov}(\Phi) \subset \mathrm{rlv}(\Phi)$.

Definition 3.2. In the notation of the preceding proposition, the *variety associated to the bunched ring* $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ is the quotient space $X(R, \mathfrak{F}, \Phi) := \widehat{X} /\!\!/ T$.

We list first properties. We say that a variety X has the A_2*-property* if any pair $x, x' \in X$ admits a common affine neighbourhood in X. Moreover, an A_2-variety X is called A_2*-maximal* if for any open embedding $X \subset X'$ into an A_2-variety X' such that $X' \setminus X$ contains no divisors we have $X' = X$.

Note that any complete A_2-variety is A_2-maximal. In particular, every projective variety is so. For a normal variety, the A_2-property is equivalent to the existence of a closed embedding into a toric variety, see [**Wło93**].

Proposition 3.3. *Let $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ be a bunched ring, and let $X := X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ be the associated variety. Then X is a normal A_2-maximal variety, and we have*

$$\mathscr{O}^*(X) = \mathbb{K}^*, \qquad \mathrm{Cl}(X) = K, \qquad \mathscr{R}(X) = R.$$

Conversely, we can show that one obtains basically all normal A_2-maximal varieties with finitely generated total coordinate ring by the construction just presented:

Theorem 3.4. *Every normal A_2-maximal variety with $\mathscr{O}^*(X) = \mathbb{K}^*$ having a finitely generated total coordinate ring arises from a bunched ring.*

4. Example: toric varieties

As mentioned, the theory of toric varieties fits into the framework of bunched rings presented so far: the toric varieties are precisely those varieties that arise from bunched polynomial rings. Here we make this statement a little more precise, and we indicate how to obtain the fan of a toric variety given by a bunched ring.

Consider a polynomial ring $R = \mathbb{K}[T_1, \dots, T_r]$, and suppose that R is graded by some lattice K such that the generators T_i are homogeneous and their degrees generate K. Moreover, let $\mathfrak{F} = (T_1, \dots, T_r)$. Let $(E \xrightarrow{Q} K, \gamma)$ be the projected cone associated to $\mathfrak{F}$, and let $\mathfrak{F}$ be an $\mathfrak{F}$-bunch. Since in the present situation every face $\gamma_0 \preceq \gamma$ is an $\mathfrak{F}$-face, we also refer to Φ just as a *bunch*.

Remark 4.1. The construction of $X = X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ is compatible with the action of the big torus $\mathbb{T}^r := (\mathbb{K}^*)^r$ on $\overline{X} = \mathrm{Spec}(R) = \mathbb{K}^r$. In particular, the subset $\widehat{X} \subset \overline{X}$ is $\mathbb{T}^r$-invariant and hence the quotient space $X = \widehat{X} /\!\!/ T$ inherits the structure of a toric variety.

The question is how to obtain the fan of the toric variety $X = X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$. For this, we use a proceedure similar to a linear Gale transformation, a classical technique in the study of convex polytopes. First note that the projection $Q \colon E \to K$ determines an exact sequence:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \xrightarrow{Q} K \longrightarrow 0.$$

Dualizing this sequence gives us a new exact sequence; here P is *not* the dual map of Q:

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{P} F \longleftarrow L \longleftarrow 0.$$

These sequences allow us to transform the collection Φ of cones into a collection Σ of cones living in N: let $\delta := \gamma^\vee \subset F_{\mathbb{Q}}$ denote the dual cone, i.e., the cone consisting of all linear forms being nonnegative on γ, and consider the face duality

$$\mathrm{faces}(\gamma) \to \mathrm{faces}(\delta), \qquad \gamma_0 \mapsto \gamma_0^* := \gamma_0^\perp \cap \delta.$$

Under this map, the collection $\mathrm{rlv}(\Phi)$ of relevant faces of Φ, is sent to a collection $\widehat{\Sigma}_0$ of faces of δ. Let $\widehat{\Sigma}$ be the fan generated by $\widehat{\Sigma}_0$, and consider

$$\Sigma := \{P(\widehat{\sigma});\ \widehat{\sigma} \in \widehat{\Sigma}_0\}.$$

Remark 4.2. The set Σ is a fan in N having X as its associated toric variety. Moreover, $\widehat{\Sigma}$ describes $\widehat{X}$, and the toric morphism $\widehat{X} \to X$ arising from the projection $P\colon F \to N$ is Cox's quotient presentation [**Cox95**].

It should be remarked that the fans Σ arising from bunches Φ are not arbitrary. In fact, they are non-degenerate in the sense that their primitive vectors generate the lattice, and they are 2-complete in the sense that they can only be enlarged by adding new rays, see [**BH04**] for details.

5. Results

Let $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ be a bunched ring, and let $X := X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ be the associated variety. The task is to read off geometrical properties of X from the combinatorial datum Φ. We present here the results of [**BH**].

The first observation is that the variety X comes along with a certain stratification. Recall that from the construction that, for each $\gamma_0 \in \mathrm{rlv}(\Phi)$, we have the open affine subsets $X_{\gamma_0} = \overline{X}_{\gamma_0} /\!\!/ T$ of $X = \widehat{X} /\!\!/ T$. This gives rise to locally closed subsets of X, namely

$$X(\gamma_0) \ := \ X_{\gamma_0} \setminus \bigcup_{\gamma_0 \prec \gamma_1 \in \mathrm{rlv}(\Phi)} X_{\gamma_1}.$$

By construction, X is the disjoint union of the $X(\gamma_0)$, where $\gamma_0 \in \mathrm{rlv}(\Phi)$. If X is toric, then the $X(\gamma_0)$ are precisely the orbits of the big torus. Moreover, the general X always admits an embedding into a toric variety such that the stratification by relevant faces is precisely the cut down orbit stratification.

An important property of the the stratification by relevant faces is that it is "equisingular" in the following sense:

Theorem 5.1. *Consider a stratum $X(\gamma_0) \subset X$ and a point $x \in X(\gamma_0)$.*

(i) *The point x is factorial if and only if Q maps $\mathrm{lin}(\gamma_0) \cap E$ onto K.*
(ii) *The point x is $\mathbb{Q}$-factorial if and only if $Q(\gamma_0)$ is of full dimension.*

In order to be characterize smoothness, we need an additional assumption (which is satisfied in many important examples).

Theorem 5.2. *Suppose that the subset $\widehat{X} \subset \overline{X} = \mathrm{Spec}(R)$ is smooth, and let $x \in X(\gamma_0)$. Then x is smooth if and only if Q maps $\mathrm{lin}(\gamma_0) \cap E$ onto K.*

The next result concerns divisor classes. We can determine the Picard group $\mathrm{Pic}(X)$, the semiample cone $\mathrm{C}^{\mathrm{sa}}(X)$ and the ample cone $\mathrm{C}^{\mathrm{a}}(X)$.

Theorem 5.3. *In the divisor class group $K = \mathrm{Cl}(X)$, we have the following descriptions:*

$$\mathrm{Pic}(X) = \bigcap_{\gamma_0 \in \mathrm{cov}(\Phi)} Q(\mathrm{lin}(\gamma_0 \cap E)), \qquad \mathrm{C}^{\mathrm{sa}}(X) = \bigcap_{\tau \in \Phi} \tau, \qquad \mathrm{C}^{\mathrm{a}}(X) = \bigcap_{\tau\Phi} \tau^{\circ}.$$

Finally, under further assumptions on $\overline{X} = \mathrm{Spec}(R)$, we are even able to determine the canonical divisor, and hence can give Fano criteria:

Theorem 5.4. *Suppose that $\overline{X} \subset \mathbb{K}^r$ is a complete intersection, defined by K-homogeneous elements $g_1, \ldots, g_s$. Then*

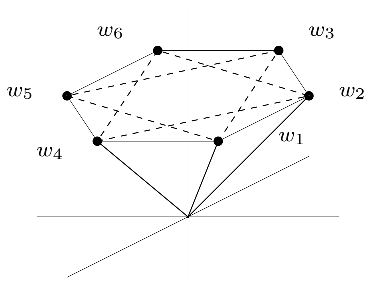
$$\sum \deg(g_j) - \sum \deg(f_i)$$

is the canonical divisor class of X in $K = \mathrm{Cl}(X)$. In particular, X is a Fano variety if and only if

$$\sum \deg(f_i) - \sum \deg(g_j) \ \in \ \bigcap_{\tau \in \Phi} \tau^{\circ} \cap \bigcap_{\gamma_0 \in \mathrm{cov}(\Phi)} Q(\mathrm{lin}(\gamma_0 \cap E)).$$

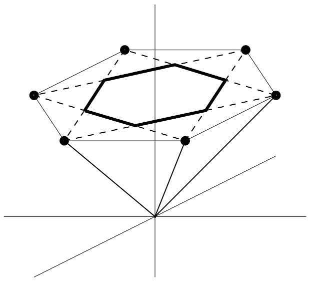
6. Examples and remarks

Example 6.1. Consider once more the homogeneous coordinate ring R of the Grassmannian $G(2,5)$, and its grading by $K = \mathbb{Z}^3$ discussed at the end of Section 2. The K-degrees $w_1, \ldots, w_6$ of the generators $T_1, \ldots, T_6$ had been distributed according to the following figure:



Moreover, the $\mathfrak{F}$-bunch Φ consists of five projected faces; the two simplicial ones are indicated by the dashed lines. By the results of the preceding section, the variety $X = X(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ has the following properties:

- X is a $\mathbb{Q}$-factorial surface with 5 (isolated) singularities,
- the Picard group of X is of index 72 in the divisor class group of X,
- the semiample cone of X is nonsimplicial with six extremal rays, as indicated below by means of the thick lines:



- the canonical divisor class of X is $(0, 0, -4) \in K$, and X is $\mathbb{Q}$-Fano but not Fano.

For surfaces, the machinery of $\mathfrak{F}$ is mainly a tool for computations in the spirit of the above example. The surfaces themselves are in principle determined by their coordinate rings:

Remark 6.2. Let X, X' be surfaces with finitely generated total coordinate rings. Then we have $X \cong X'$ if and only if $\mathscr{R}(X) \cong \mathscr{R}(X')$.

The above example stems from a more general class: consider the Grassmannian $G(k, V)$ of k-planes in a vector space V, and the ideal $I(k, V)$ generated by the Plücker Relations on $W := \bigwedge^k V$.

Remark 6.3. The quotient algebra $R := \mathbb{K}[W]/I(k, V)$ is factorial, and it is naturally graded by $K = \mathbb{Z}^n$. Moreover, any surjection $K \to K'$ of lattices defines new gradings of R, and we can look for $\mathfrak{F}$-bunches with respect to these gradings. The resulting varieties are quotients of torus actions on $G(k, V)$.

As the experience shows, concrete computations in bunched rings $(R, \mathfrak{F}, \Phi)$ involve two types of problems: Firstly, the $\mathfrak{F}$-faces have to be determined. This is a purely algebraic task, and amounts to computing the radical of a certain ideal, and then testing ideal membership. Both can be done by Computer Algebra Systems. Secondly, one has to deal with the combinatorics of the collection of projected $\mathfrak{F}$-faces. Here the existing mathematical software on convex cones (and polytopes) is helpful.

References

[BH] F. Berchtold & J. Hausen – Cox rings and combinatorics.

[BH03] F. Berchtold & J. Hausen – Homogeneous coordinates for algebraic varieties, *J. Algebra* **266** (2003), no. 2, 636–670.

[BH04] ______, Bunches of cones in the divisor class group — A new combinatorial language for toric varieties, *Int. Math. Res. Not.* **2004** (2004), no. 6, 261–302.

[Cox95] D. A. Cox – The homogeneous coordinate ring of a toric variety, *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 1, 17–50.

[EKiW] E. J. Elizondo, K. Kurano & K. ichi Watanabe – The total coordinate ring of a normal projective variety, to appear in J. Algebra.

[Wło93] J. Włodarczyk – Embeddings in toric varieties and prevarieties, *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), no. 4, 705–726.

Mathematisches Institut, Seminars
(Y. Tschinkel, ed.), p. 221–229
Universität Göttingen, 2003-04

EINE GETWISTETE TOPOLOGISCHE SPURFORMEL UND LIFTUNGEN VON AUTOMORPHEN DARSTELLUNGEN

U. Weselmann
Universität Heidelberg, Mathematisches Institut, Im Neuenheimer Feld 288, 69120 Heidelberg, Germany • *E-mail :* weselmann@mathi.uni-heidelberg.de

Abstract. We discuss some recent applications of a twisted topological trace formula to lifts of automorphic representations.

1. Kohomologie lokalsymmetrischer Räume

Sei $G/\mathbb{Q}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe, die wir zur Vereinfachung als spaltend annehmen mit Borel B und spaltendem Torus T. Für hinreichend kleine kompakte offene Untergruppen $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ betrachten wir die lokal symmetrischen Räume

$$X_{K_f} \quad = \quad X^G_{K_f} \quad = \quad G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty Z_\infty K_f$$

wobei $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ eine maximale unter den zusammenhängenden kompakten Untergruppen ist und $Z_\infty = Z_G(\mathbb{R})^\circ$ die Zusammenhangskomponente der reellwertigen Punkte des Zentrums $Z_G \subset G$ ist.

January 29th, 2004.

Einem positiven Gewicht $\lambda \in X^*(T)$ ordnen wir die endlich dimensionale Darstellung E_λ von $G/\mathbb{Q}$ mit höchstem Gewicht λ zu. Dazu ist ein lokales System $\tilde{E}_\lambda$ auf X_{K_f} assoziiert, und auf dem Limes erhalten wir eine Operation der Gruppe $G(\mathbb{A}_f)$:

$$H^i(G, E_\lambda) \quad = \quad \varinjlim_{K_f} H^i(X^G_{K_f}, \tilde{E}_\lambda)$$

Das Problem ist jetzt, die alternierende Summe der Kohomologiemoduln

$$H^*(G, E_\lambda) \quad = \quad \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (-1)^i H^i(G, E_\lambda)$$

als Element in der Grothendieckgruppe $K_0(G(\mathbb{A}_f))$ der Kategorie der zulässigen $G(\mathbb{A}_f)$-Moduln zu verstehen.

Aus der fundamentalen Arbeit von Franke [**Fra98**] folgt, dass man $H^*(G, E_\lambda)$ durch automorphe Formen beschreiben kann. Zunächst lässt sich der virtuelle Kohomologiemodul durch die L^2-Kohomologie der Levi-Gruppen M zu den Standard-Parabolischen $P = MU$ für gewisse virtuelle Koeffizientensysteme $E^M_\lambda \in K_0(M) \otimes \mathbb{Q}$ ausdrücken:

$$H^*(G, E_\lambda) \quad = \quad \sum_M Ind^{G(\mathbb{A}_f)}_{P(\mathbb{A}_f)} H^*_{(2)}(M, E^M_\lambda).$$

Dabei gilt

$$H^*_{(2)}(G, E_\lambda) \quad = \quad \sum_{\pi_f} h^*(\pi_f)\pi_f,$$

wobei über diejenigen Darstellungen π_f von $G(\mathbb{A}_f)$ summiert wird, die sich zu einer quadratintegrierbaren automorphen Darstellung $\pi_\infty \otimes \pi_f$ ergänzen lassen.

$$h^*(\pi_f) \quad = \quad \sum_{i \geq 0,\, \pi_\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes E_\lambda) \cdot mult(\pi_f \otimes \pi_\infty),$$

wobei $mult(\pi)$ die Multiplizität von π im diskreten Teil des L^2-Spektrums bezeichnet.

2. Twists

Weiterhin betrachten wir einen Automorphismus $\eta \in Aut(G)$ endlicher Ordnung n und nehmen an, dass η die Gruppen B, T, K_∞ und K_f stabilisiert. Unter der weiteren Voraussetzung, dass η den Charakter λ fixiert, können wir E_λ zu einem $G \rtimes \langle\eta\rangle$-Modul machen, bei dem η trivial auf dem höchsten Gewichtsraum operiert. Dann operiert η auch auf den Kohomologiegruppen $H^i(G, E_\lambda)$ und wir können interpretieren:

$$H^*(G, E_\lambda) \quad \in \quad K_0(G(\mathbb{A}_f) \rtimes \langle\eta\rangle).$$

Um diesen virtuellen Modul zu verstehen, muss man die Spuren berechnen:

$$tr(h_f \times \eta^j, H^*(G, E_\lambda)), \text{ für Schwartzfunktionen } h_f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f)),\ 0 \leq j \leq n-1.$$

Bemerkung 2.1. Hat die Gruppe G keine diskrete Serie (z.B. $G = \mathrm{GL}_n$ für $n \geq 3$) so gilt in der ungetwisteten Situation $h^*(\pi_f) = 0$, das bedeutet, Spitzenformen sind in dem virtuellen Modul $H^*(G, E_\lambda) \in K_0(G(\mathbb{A}_f))$ nicht sichtbar. Dagegen ergeben sich durch unterschiedliche Vorzeichen bei der Operation des äußeren Automorphismus η auf den $H^i(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes E_\lambda)$ in verschiedenen Graden i nicht triviale Beiträge, wenn man den virtuellen Modul in der Grothendieckgruppe $K_0(G(\mathbb{A}_f) \rtimes \langle\eta\rangle)$ betrachtet.

3. Die Lefschetzsche Spurformel für kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten X

Es bezeichne $p_1, p_2 : X \times X \to X$ die Projektionen und $D \subset X \times X$ die Diagonale. Es sei $i : C \hookrightarrow X \times X$ eine Korrespondenz, worunter wir eine Untermannigfaltigkeit verstehen, so dass $\pi_1 = p_1 \circ i : C \to X$ eine endliche Überlagerung ist. Sei $\mathscr{E} \to X$ ein lokales System und $\varphi : \pi_2^*\mathscr{E} \to \pi_1^*\mathscr{E}$ ein Morphismus von lokalen Systemen. Weiterhin sei

$$C \cap D \quad = \quad \bigcup_{j \in J} \Phi_j$$

die Zerlegung der Fixpunktmenge in Zusammenhangskomponenten. Wir nehmen an, dass die Φ_j Untermannigfaltigkeiten sind und dass für die Einschränkungen der Tangentialbündel auf die Φ_j die folgende Transversalitätsbedingung erfüllt ist:

$$TC|_{\Phi_j} \ \cap \ TD|_{\Phi_j} \quad = \quad T\Phi_j.$$

Die Transversalitätsbedingung impliziert zusammen mit der Kompaktheit von X, dass J eine endliche Menge ist.

Dann ist die *globale Spur* $tr(\pi_{1*} \circ \varphi \circ \pi_2^*)$ der Korrespondenz (C, φ) definiert als die alternierende Summe der Spuren auf den Kohomologiegruppen der folgenden Komposition von Abbildungen:

$$H^*(X, \mathscr{E}) \xrightarrow{\pi_2^*} H^*(C, \pi_2^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\varphi} H^*(C, \pi_1^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\pi_{1*}} H^*(X, \pi_{1*}\pi_1^*\mathscr{E}) \xrightarrow{tr} H^*(X, \mathscr{E}).$$

Für $x \in \Phi_j$ induziert φ Endomorphismen der Halme

$$\mathscr{E}_x \simeq (\pi_2^*\mathscr{E})_x \xrightarrow{\varphi} (\pi_1^*\mathscr{E})_x \simeq \mathscr{E}_x,$$

deren Spur nur von der Zusammenhangskomponente Φ_j abhängt und mit $tr(\varphi|\Phi_j)$ bezeichnet wird. Weiterhin sei $\chi(\Phi_j)$ die Euler Poincaré Charakteristik von Φ_j und der Vorzeichenfaktor

$$\varepsilon_j \quad = \quad sign\left(\det(id - \pi_{1*}\pi_2^*|N(\Phi_j))\right) \qquad \text{für } j \in J$$

beschreibt die Wirkung Korrespondenz auf dem Normalenbündel $N(\Phi_j)$. Dann gilt die **Lefschetzsche Spurformel:**

$$tr(\pi_{1*} \circ \varphi \circ \pi_2^*) \quad = \quad \sum_{j \in J} \quad tr(\varphi|\Phi_j) \cdot \chi(\Phi_j) \cdot \varepsilon_j,$$

Um die Formel auf die nicht kompakten lokal symmetrischen Räume X_{K_f} anzuwenden, benutzen wir den folgenden Trick: Bezeichnet Δ die Menge der einfachen Wurzeln, so kann man die Borel-Serre Kompaktifizierung von X_{K_f} als Mannigfaltigkeit mit Ecken so konstruieren, dass die Randkomponenten den Teilmengen von $I \subset \Delta$ entsprechen. Verklebt man $2^{\#\Delta}$ Kopien von X_{K_f} entlang der Randkomponenten der Borel-Serre-Kompaktifizierung zusammen, so erhält man eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit S_{K_f} zusammen mit einer Operation der Gruppe $\Sigma = \{\pm 1\}^\Delta$, so dass z.B. gilt:

$$H^i(X_{K_f}, E_\lambda) \quad = \quad H^i(S_{K_f}, E_\lambda)^\Sigma.$$

Aus der analogen Aussage für die Kohomologie mit kompaktem Träger folgt dann:

$$\begin{aligned} & tr\left(h_f \circ \eta, H_c^*\left(X_{K_f}, \tilde{E}_\lambda\right)\right) \\ = \quad & 2^{-\#\Delta} \cdot \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^\Delta} sign(\sigma) \cdot tr\left(h_f \circ \eta \circ \sigma, H^*(S_{K_f}, \tilde{E}_\lambda)\right) \end{aligned}$$

Man kann die Lefschetzsche Spurformel für kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten in dieser Situation anwenden. Bezeichnet man für $I \subset \Delta$ mit $P_I \supset B$ die zugehördige Standard-Parabolische und mit $A_I = (\cap_{\alpha \in I} \ker \alpha)^\circ \subset T(\mathbb{R})$ die Zusammenhangskomponente des korrespondierenden reellen Torus, dann sieht S_{K_f} in einer Umgebung des mit I indizierten Stratums $S^I_{K_f}$ aus wie der Raum:

$$P_I(\mathbb{Q})\backslash \big(P_I(\mathbb{R})/K^I_\infty Z_\infty \times_{A_I} Y_I\big) \times G(\mathbb{A}_f)/K_f,$$

wobei $K^I_\infty = K_\infty \cap P_I(\mathbb{R})$ gesetzt wurde und A_I durch die Wurzeln aus $\Delta - I$ auf $Y_I = \{\pm 1\}^I \times \mathbb{R}^{\Delta - I}$ operiert. Ersetzt man darin Y_I durch $\{\pm 1\}^I \times \{0\}^{\Delta - I}$, so erhält man gerade das Stratum $S^I_{K_f}$. Die Spiegelungsgruppe $\Sigma = \{\pm 1\}^\Delta$ operiert in offensichtlicher Weise auf Y_I.

Jetzt ist es eine mühselige Routinearbeit die Fixpunktkomponenten der Heckekorrespondenzen zu berechnen. Diese werden durch lokal-symmetrische Räume zu Zentralisatoren von halbeinfachen Elementen stratifiziert, deren Euler Charakteristik mittels der Gauss-Bonnet-Formel von Harder [**Har71**] bestimmt werden kann. Auf diese Weise erhält man eine (unstabilisierte) Spurformel.

Die Spurformel kann in einigen interessanten Fällen so stabilisiert werden, dass nur stabile orbitale Integrale für eine einzige endoskopische Gruppe auftauchen.

Wir nehmen an, dass die Galois Kohomologie der Gruppe G nicht zu dem Problem beiträgt, die Konjugationsklassen innerhalb einer stabilen Konjugationsklasse zu beschreiben und erinnern daran, dass η die Untergruppen $B = P_\emptyset$ und $A_\emptyset = T(\mathbb{R})^\circ$ stabilisiert.

$$tr(\eta \circ h_f, H^*(G, E_\lambda)) =$$

$$\sum_{\substack{I \subset \Delta \\ I^\eta = I}} (-1)^{\#(\Delta - I)/\eta} \sum_{\substack{\gamma \in P_I(\mathbb{Q}) \\ mod\ stabile\ Konj}} \alpha(\gamma) \cdot tr(\eta\gamma | E_\lambda) \cdot O_{st}(\eta\gamma, h_f).$$

Dabei ist $\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma_\infty) \in \mathbb{Q}$, und es gilt $\alpha(\gamma) = 0$ sofern nicht die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- $N(\gamma) = \eta^{n-1}(\gamma) \cdot \ldots \cdot \eta(\gamma) \cdot \gamma$ ist zu einem Element in $(K_\infty \cap P_I(\mathbb{R})) \cdot A_I(\mathbb{R})$ konjugiert;
- $\chi_{I,\alpha}(N(\gamma)) > 1$ für alle $\alpha \in \Delta - I$, wobei $\chi_{I,\alpha} : P_I \to \mathrm{GL}_1$ ein rationaler Charakter ist, dessen Einschränkung auf A_I ein positives Vielfaches der Wurzel α ergibt.

Im Fall $h_f = \otimes_p h_p$ ist dabei das stabile orbitale Integral definiert durch:

$$\begin{aligned} O_{st}(\eta\gamma, h_f) &= \prod_p O_{st}(\eta\gamma_p, h_p) \qquad \text{mit} \\ O_{st}(\eta\gamma_p, h_p) &= \sum_{\gamma'_p \sim \gamma_p} \int_{G(\mathbb{Q}_p)/G^{\gamma'_p\eta}(\mathbb{Q}_p)} h_p(x_p\gamma'_p\eta(x_p)^{-1})dx_p, \end{aligned}$$

wobei für jedes p über ein Repräsentantensystem der rationalen η-Konjugationsklassen innerhalb einer $\overline{\mathbb{Q}}$-η-Konjugationsklasse summiert wird und wobei mit $G^{\gamma'_p\eta} = \{g \in G | g \cdot \gamma'_p = \gamma'_p \cdot \eta(g)\}$ der η-Zentralisator von γ'_p bezeichnet wird.

4. Vergleich von Spurformeln

Wir nennen eine über $\mathbb{Q}$ spaltende Gruppe G_1 stabile endoskopische Gruppe zu (G, η), wenn für die komplexen dualen Gruppen die folgende Relation erfüllt ist:

$$\hat{G}_1 = (\hat{G}^{\hat{\eta}})^\circ$$

und erhalten die folgenden Serien von Beispielen:

(a)	$G = \mathrm{GL}_{2n} \times \mathrm{GL}_1$	$\eta(A, \alpha) = (J \cdot {}^tA^{-1} \cdot J^{-1}, \det(A) \cdot \alpha)$	$G_1 = GSpin_{2n+1}$
(b)	$G = \mathrm{PGL}_{2n+1}$	$\eta(A) = J \cdot {}^tA^{-1} \cdot J^{-1}$	$G_1 = \mathrm{Sp}_{2n}$
(c)	$G = \mathrm{SO}_{2n+2}$	$\eta \in \mathrm{O}_{2n+2} - \mathrm{SO}_{2n+2}$	$G_1 = \mathrm{Sp}_{2n}$,

wobei J die Antidiagonalmatrix mit abwechselnden Einträgen 1 und -1 bezeichnet.

Bezeichnet T_1 einen spaltenden Torus von G_1, so gilt für die Charaktergruppen

$$X^*(T_1) \quad = \quad X_*(\hat{T}_1) \quad = \quad X_*(\hat{T})^{\hat{\eta}} \quad = \quad X^*(T)^\eta,$$

so dass einem $\lambda \in X^*(T)^\eta$ neben dem $G \rtimes \langle\eta\rangle$- Modul E_λ auch ein G_1-Modul $E_{\lambda,1}$ zugeordnet ist.

Da der Kocharaktermodul $X_*(T_1)$ zum Koinvariantenmodul $X_*(T)_\eta$ isomorph ist, erhält man für jede Algebra k eine Normabbildung

$$\mathscr{N} : T(k) = X_*(T) \otimes k^* \quad \to \quad X_*(T)_\eta \otimes k^* \quad = \quad X_*(T_1) \otimes k^* = T_1(k).$$

Man sagt, dass zwei halbeinfache Elemente $\gamma \in G(k)$ und $\gamma_1 \in G_1(k)$ *matchen*, wenn die stabilen (η-) Konjugationsklassen von γ bzw. γ_1 Elemente $\gamma^* \in T(\overline{k})$ bzw. $\gamma_1^* \in T_1(\overline{k})$ enthalten mit $\gamma_1^* = \mathscr{N}(\gamma^*)$.

Lemma 4.1. *Das η-halbeinfache Element $\gamma \in G(k)$ matche mit $\gamma_1 \in G_1(k)$. Dann gilt:*

$$tr(\eta \circ \gamma | E_\lambda) \quad = \quad tr(\gamma_1 | E_{\lambda,1}).$$

Die Normabbildung $\mathscr{N}$ induziert in den Beispielserien (a) und (b) jeweils Isomorphismen zwischen den stabilen halbeinfachen η-Konjugationsklassen in $G(\mathbb{Q})$ und den stabilen Konjugationsklassen in $G_1(\mathbb{Q})$.

Man nennt zwei Schwartz-Bruhat-Funktionen $h_f \in \mathscr{C}_c(G(\mathbb{A}_f))$ und $h_{f,1}$ matchend, wenn für alle halbeinfachen matchenden $\gamma \in G(\mathbb{A}_f)$ und $\gamma_1 \in G_1(\mathbb{A}_f)$ die stabilen Orbitalintegrale übereinstimmen:

$$O_{st}(\eta\gamma, h_f) \quad = \quad O_{st}(\gamma_1, h_{f,1}).$$

Eine zulässige Darstellung π von $G(\mathbb{A}_f) \rtimes \langle \eta \rangle$ heißt *Lift* der Darstellung π_1 von $G_1(\mathbb{A}_f)$, wenn die Spuren beider Darstellungen stabile Distributionen sind und außerdem für matchende $h_f, h_{f,1}$ gilt:

$$tr(\eta \circ h_f | \pi) \quad = \quad tr(h_{f,1} | \pi_1).$$

Durch einen Vergleich der Spurformeln erhält man

$$tr(\eta \circ h_f, H^*(G, E_\lambda)) = tr(h_{1,f}, H^*(G_1, E_{1,\lambda}))$$

für matchende Schwartz-Bruhat-Funktionen h_f, $h_{1,f}$. Um daraus nicht-triviale Schlussfolgerungen ziehen zu können, müssen die folgenden Vermutungen erfüllt sein, die man als **fundamentales Lemma** bezeichnet:

- Die charakteristischen Funktionen von $G(\mathbb{Z}_p)$ und $G_1(\mathbb{Z}_p)$ matchen für fast alle p (Fundamentales Lemma für das Einselement der Heckealgebra).
- Das allgemeine fundamentale Lemma für die unverzweigte Heckealgebra ist über den Satake-Isomorphismus äquivalent zu der folgenden Aussage: Wird die unverzweigte Hauptseriendarstellung $\pi_{p,1}$ durch den Satakeparameter $t_p \in \hat{G}_1$ beschrieben und gehört zu der Hauptseriendarstellung π_p von $G(\mathbb{Q}_p)$ als Satakeparameter das Bild von t_p unter der Einbettung $\hat{G}_1 \hookrightarrow \hat{G}$, so ist π_p Lift von $\pi_{p,1}$.

Aus dem fundamentalen Lemma und der lokalen Existenz von matchenden Funktionen [**Hal94**] folgt, dass ein Lift von Darstellungen, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist modulo solcher Darstellungen, die von der Form $Ind_{G(\mathbb{A}_f)}^{G(\mathbb{A}_f) \rtimes \langle \eta \rangle} \pi_f$ sind.

Obige Charakteridentität lässt sich so umformulieren, dass $H^*(G, E_\lambda)$ der Lift von $H^*(G_1, E_{1,\lambda})$ ist modulo Darstellungen der Form $Ind_{G(\mathbb{A}_f)}^{G(\mathbb{A}_f)\rtimes\langle\eta\rangle}\pi_f$ in der Grothendieck Gruppe der zulässigen $G(\mathbb{A}_f) \rtimes \langle\eta\rangle$-Moduln.

5. Anwendungen

Wir können zeigen [**JB02**], dass für jedes m die fundamentalen Lemma in den Beispielserien (a),(b),(c) zueinander äquivalent sind, sofern man die fundamentalen Lemmata für alle Beispiele einer Serie mit $n \leq m$ zu einer Aussage zusammenfasst.

Da Flicker das fundamentale Lemma für $n = 2$ im Fall (a) gezeigt hat und da der Fall $n = 1$ bekannt ist, erhalten wir deshalb Liftungen von $\mathrm{GSp}_4 \simeq \mathrm{GSpin}_5$ nach $\mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_1$ und von Sp_4 nach PGL_5.

Unter Benutzung von Charakter-Identitäten zwischen lokalen Darstellungen, von Eigenschaften des θ-Lifts und von bekannten Eigenschaften der Kohomologie von 3-dimensionalen Siegelschen Modulräumen erhält man für jede irreduzible Darstellung π_f, die weder CAP noch endoskopisch ist und zu $H^3(\mathrm{GSp}_4, E_{\lambda,1})$ beiträgt, dass sie mit Multiplizität 4 in H^3 vorkommt und schwach äquivalent ist zu einer automorphen Darstellung $\tilde{\pi}_f \times \pi_\infty^W$, welche ein globales Whittaker-Modell besitzt.

Daraus kann man Multiplizitätenaussagen für cuspidale automorphe Darstellungen gewinnen, die zur Kohomologie beitragen: Aus der Multiplizität 4-Aussage folgt zunächst, dass

$$mult(\pi_f \times \pi_\infty^W) + mult(\pi_f \times \pi_\infty^H) = 2$$

gilt, wobei π_∞^H die holomorphe diskrete Seriendarstellung mit

$$H^3(\mathfrak{g}_1, K_\infty, E_{\lambda,1} \otimes \pi_\infty^H) \neq 0$$

bezeichnet. Da diese Aussage aber auch für $\tilde{\pi}_f$ anstelle π_f gilt, folgt mit Hilfe der Eindeutigkeit des Whittakermodells:

$$mult(\tilde{\pi}_f \times \pi_\infty^W) = mult(\tilde{\pi}_f \times \pi_\infty^H) = 1.$$

Andererseits wird die zu π_f gehörige 4-dimensionalen Galoisdarstellungen

$$\rho(\pi_f) \quad = \quad Hom_{G_1(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, H^3(X, E_\lambda \otimes \mathbb{Q}_\ell))$$

nach Resultaten von Weissauer und Laumon durch die Satakeparameter von π_f beschrieben und ist deshalb nach Chebotarev zu der entsprechenden Darstellung für $\tilde{\pi}_f$ isomorph. Aus der Hodge-Tate-Theorie folgt dann, dass obige Multiplizität 1-Formel auch für π_f anstelle $\tilde{\pi}_f$ gilt.

References

[Fra98] J. Franke – Harmonic analysis in weighted L_2-spaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **31** (1998), no. 2, 181–279.

[Hal94] T. C. Hales – The twisted endoscopy of GL(4) and GL(5): transfer of Shalika germs, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 2, 595–632.

[Har71] G. Harder – A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **4** (1971), 409–455.

[JB02] U. W. J. Ballmann, R. Weissauer – Remarks on the fundamental lemma for stable twisted endoscopy of classical groups, 2002, Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik, Mannheim–Heidelberg, **7**.