FONCTIONS ZÊTA DES HAUTEURS DES ESPACES FIBRÉS

par

Antoine Chambert-Loir & Yuri Tschinkel

Table des matières

Introduction

Cet article est le deuxième d'une série consacrée à l'étude des hauteurs sur certaines variétés algébriques sur un corps de nombres, notamment en ce qui concerne la distribution des points rationnels de hauteur bornée.

Précisément, soient X une variété algébrique projective lisse sur un corps de nombres F, $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X et $H_{\mathscr{L}} : X(\overline{F}) \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction hauteur (exponentielle) pour $\mathscr{L}$. Si U est un ouvert de Zariski de X, on cherche à estimer le nombre

$$N_U(\mathscr{L}, H) = \#\{x \in U(F)\,;\, H_{\mathscr{L}}(x) \leq H\}$$

lorsque H tend vers $+\infty$. L'étude de nombreux exemples a montré que l'on peut s'attendre à un équivalent de la forme

$$(*) \qquad N_U(\mathscr{L}, H) = \Theta(\mathscr{L}) H^{a(\mathscr{L})} (\log H)^{b(\mathscr{L})-1}(1+o(1)), \quad H \to +\infty$$

pour un ouvert U convenable et lorsque par exemple $\mathscr{L}$ et ω_X^{-1} (fibré anticanonique) sont amples. On a en effet un résultat de ce genre lorsque X est une variété de drapeaux [**11**], une intersection complète lisse de bas degré (méthode du cercle), une variété torique [**4**], une variété horosphérique [**19**], une compactification équivariante d'un groupe vectoriel [**10**], etc. On dispose de plus d'une description conjecturale assez précise des constantes $a(\mathscr{L})$ et $b(\mathscr{L})$ en termes du cône des diviseurs effectifs [**1**] ainsi que de la constante $\Theta(\mathscr{L})$ ([**15**], [**5**]).

En fait, on étudie plutôt la *fonction zêta des hauteurs*, définie par la série de Dirichlet

$$Z_U(\mathscr{L}, s) = \sum_{x \in U(F)} H_{\mathscr{L}}(x)^{-s}$$

à laquelle on applique des théorèmes taubériens standard. Sur cette série, on peut se poser les questions suivantes : domaine de convergence, prolongement méromorphe, ordre du premier pôle, terme principal, sans oublier la croissance dans les bandes verticales à gauche du premier pôle. Cela permet de proposer des conjectures de précision variable.

Dans cet article, nous considérons certaines fibrations localement triviales construites de la façon suivante. Soient G un groupe algébrique linéaire sur F agissant sur une variété projective lisse X, B une variété projective lisse sur F et T un G-torseur sur B localement trivial pour la topologie de Zariski. Ces données définissent une variété algébrique projective Y munie d'un morphisme $Y \to B$ dont les fibres sont isomorphes à X. Le cœur du problème est de comprendre le comportement de la fonction hauteur lorsqu'on passe d'une fibre à l'autre, comportement vraiment non trivial bien qu'elles soient toutes isomorphes.

Dans notre premier article (*Torseurs arithmétiques et espaces fibrés*, [**9**]), nous avons exposé en détail la construction de hauteurs sur de telles variétés. Dans celui-ci, nous appliquons ces considérations générales au cas d'une fibration en variétés toriques provenant d'un torseur sous un *tore déployé,* pour l'ouvert U défini par le tore. Nous avons construit les hauteurs à l'aide d'un prolongement du torseur géométrique en un torseur arithmétique, ce qui correspond en l'occurence au choix de métriques hermitiennes sur certains fibrés en droites. Écrivons la fonction zêta comme la somme des fonctions zêta des fibres

$$Z_U(\mathscr{L}, s) = \sum_{b \in B(F)} \sum_{x \in U_b(F)} H_{\mathscr{L}}(x)^{-s} = \sum_{b \in B(F)} Z_{U_b}(\mathscr{L}|_{U_b}, s).$$

Chaque U_b est isomorphe au tore et on peut exprimer la fonction zêta des hauteurs de U_b à l'aide de la formule de Poisson adélique. De cette façon, la fonction zêta de U apparaît comme une intégrale sur certains caractères du tore adélique de la fonction L d'Arakelov du torseur arithmétique sur B.

Ainsi, nous pouvons démontrer des *théorèmes de montée* : supposons que B vérifie une conjecture, alors Y la vérifie. Bien sûr, la méthode reprend les outils utilisés dans la démonstration de ces conjectures pour les variétés toriques ([**4, 2, 3**]).

Par exemple, nous démontrons au § 5.1 l'holomorphie de la fonction $Z_U(\mathscr{L}, s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > a(\mathscr{L})$ sous la seule hypothèse de la convergence de la fonction zêta des hauteurs analogue sur B ; cela implique que pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre de points rationnels de hauteur $H_{\mathscr{L}}$ inférieure à H est $O(H^{a(\mathscr{L})+\varepsilon})$. Ensuite, sous des hypothèses raisonnables concernant B, nous établissons un prolongement méromorphe de cette fonction zêta à gauche de $a(\mathscr{L})$ et nous démontrons que l'ordre du pôle est inférieur ou égal à $b(\mathscr{L})$; cela précise la majoration du nombre de points en $O(H^{a(\mathscr{L})}(\log H)^{b(\mathscr{L})-1})$. Enfin, lorsque $\mathscr{L} = \omega_Y^{-1}$, nous démontrons que le pôle est effectivement d'ordre $b(\mathscr{L})$ d'où une estimation de la forme $(*)$ et nous identifions la constante $\Theta(\mathscr{L})$, établissant ainsi la conjecture de Manin raffinée par Peyre. Pour un fibré en droites quelconque, la preuve de la conjecture de Batyrev–Manin [**1**] avec son raffinement par Batyrev–Tschinkel [**5**] est ramenée à la détermination exacte de l'ordre du pôle, c'est-à-dire à la non-annulation d'une certaine constante. Dans le cas des variétés toriques ou des variétés horosphériques, l'utilisation de « fibrations $\mathscr{L}$-primitives » dans [**3**] et [**19**] a permis d'établir cette conjecture. Moyennant des hypothèses sur B, cette méthode devrait s'étendre au sujet de notre étude.

Notre méthode impose de disposer de majorations de la fonction zêta des hauteurs (pour B) dans les bandes verticales à gauche du premier pôle ; nous avons ainsi tâché d'obtenir de telles majorations pour la variété Y. Il est en outre bien connu que cela entraîne un développement asymptotique assez précis pour le nombre de points de hauteur bornée, cf. le théorème taubérien donné en appendice. Quelques cas de variétés toriques sur $\mathbf{Q}$ avaient en effet attiré l'attention des spécialistes de théorie analytique des nombres (voir notamment les articles de É. Fouvry et R. de la Bretèche dans [**16**], ainsi que [**6**]). Notre méthode établit un tel développement pour les variétés toriques lisses, les variétés horosphériques, etc. sur tout corps de nombres.

La démonstration de l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction zêta des hauteurs pour les variétés toriques ou pour les variétés horosphériques faisait intervenir un théorème technique d'analyse complexe à plusieurs variables dont la démonstration se trouve dans [**4**], [**3**] et [**19**]. En vue d'obtenir les majorations exigées dans les bandes verticales, nous sommes obligés d'en préciser la preuve ; ceci est l'objet du § 3.

Dans les § 4 et § 5 se situe l'étude de la fonction zêta des hauteurs d'une variété torique et d'une fibration en variétés toriques. Pour les variétés toriques, nous améliorons le terme d'erreur à la suite de [**4, 18, 8**]. Le théorème de montée pour les fibrations généralise le résultat principal de [**19**].

Notations et conventions

Si $\mathscr{X}$ est un schéma, on note $\mathrm{Pic}(\mathscr{X})$ le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathscr{X}$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{X}$, on note

$\mathbf{V}(\mathscr{F}) = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}\mathscr{F}$ et $\mathbf{P}(\mathscr{F}) = \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}\mathscr{F}$ les fibrés vectoriels et projectifs associés à $\mathscr{F}$.

On note $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathscr{X})$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites hermitiens sur $\mathscr{X}$ (c'est-à-dire des fibrés en droites munis d'une métrique hermitienne continue sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ et invariante par la conjugaison complexe)..

Si $\mathscr{X}$ est un S-schéma, et si $\sigma \in S(\mathbf{C})$, on désigne par $\mathscr{X}_\sigma$ le $\mathbf{C}$-schéma $\mathscr{X} \times_\sigma \mathbf{C}$. Cette notation servira lorsque S est le spectre d'un localisé de l'anneau des entiers d'un corps de nombres F, de sorte que σ n'est autre qu'un plongement de F dans $\mathbf{C}$.

Si G est un schéma en groupes sur S, $X^*(G)$ désigne le groupe des S-homomorphismes $G \to \mathbf{G}_m$ (caractères algébriques).

Si $\mathscr{X}/S$ est lisse, le faisceau canonique de $\mathscr{X}/S$, noté $\omega_{\mathscr{X}/S}$, est la puissance extérieure maximale de $\Omega^1_{\mathscr{X}/S}$.

Enfin, cet article commence au paragraphe 3. Les références aux paragraphes 1 et 2 renvoient ainsi à l'article précédent [**9**].

3. Fonctions holomorphes dans un tube

Le but de ce paragraphe est de prouver un théorème d'analyse sur le prolongement méromorphe de certaines intégrales et leur estimation dans des bandes verticales. Ce théorème généralise un énoncé analogue de [**4, 19**]. La présentation en est un peu différente et le formalisme que nous introduisons permet de contrôler la croissance des fonctions obtenues. Ce contrôle est nécessaire pour utiliser des théorèmes taubériens précis et améliorer ainsi le développement asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée.

Les résultats de ce paragraphe n'interviennent que dans la preuve des théorèmes 4.4.6 et 5.2.5.

3.1. Énoncé du théorème

Soit V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une mesure de Lebesgue dv et d'une norme $\|\cdot\|$. On dispose alors d'une mesure canonique dv^* sur le dual V^*. Notons $V_\mathbf{C} = V \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}$ le complexifié de V. On appelle *tube* toute partie connexe de $V_\mathbf{C}$ de la forme $\Omega + iV$ où Ω est une partie connexe de V ; on le notera $\mathsf{T}(\Omega)$.

Soit enfin M un sous-espace vectoriel de V muni d'une mesure de Lebesgue dm.

Définition 3.1.1. — Une *classe de contrôle* $\mathscr{D}$ est la donnée pour tout couple $M \subset V$ de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie d'un ensemble $\mathscr{D}(M,V)$ de fonctions mesurables $\kappa : V \to \mathbf{R}_+$ dites $\mathscr{D}(M,V)$-*contrôlantes* vérifiant les propriétés suivantes :

(a) si κ_1 et κ_2 sont deux fonctions de $\mathscr{D}(M,V)$, λ_1 et λ_2 deux réels positifs, et si κ est une fonction mesurable $V \to \mathbf{R}_+$ telle que $\kappa \leq \lambda_1\kappa_1 + \lambda_2\kappa_2$, alors $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$;

(b) Si $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$ et si K est un compact de V, la fonction $v \mapsto \sup_{u\in K} \kappa(v+u)$ appartient à $\mathscr{D}(M,V)$;

(c) si $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$, pour tout $v \in M \setminus 0$, $\kappa(tv)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$;

(d) si $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$, pour tout sous-espace $M_1 \subset M$, la fonction M_1-invariante

$$\kappa_{M_1} : v \mapsto \int_{M_1} \kappa(v+m_1)\,dm_1$$

est finie et appartient à $\mathscr{D}(M/M_1, V/M_1)$;

(e) si $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$, pour tout sous-espace $M_1 \subset M$ et tout projecteur $p : V \to V$ de noyau M_1, la fonction M_1-invariante $\kappa \circ p$ appartient à $\mathscr{D}(M/M_1, V/M_1)$.

3.1.2. Il existe une classe de contrôle $\mathscr{D}^{\max}$ contenant toutes les classes de contrôles : l'ensemble $\mathscr{D}^{\max}(M,V)$ est défini par récurrence sur la dimension de M par les trois conditions (a, c, e) dans la définition 3.1.1. La dernière condition est alors automatique.

Dans la suite, on fixe une classe de contrôle $\mathscr{D}$, et on abrège l'expression $\mathscr{D}(M,V)$-*contrôlante* en M-*contrôlante.*

Définition 3.1.3. — Une fonction $f : \mathsf{T}(\Omega) \to \mathbf{C}$ sur un tube est dite M-*contrôlée* s'il existe une fonction M-contrôlante κ telle que pour tout compact $K \subset \mathsf{T}(\Omega)$, il existe un réel $c(K)$ de sorte que l'inégalité

$$|f(z+iv)| \leq c(K)\kappa(v)$$

soit vérifiée pour tout $z \in K$ et tout $v \in V$.

3.1.4. Considérons une fonction sur un tube, $f : \mathsf{T}(\Omega) \to \mathbf{C}$. Soit M un sous-espace vectoriel de V, muni d'une mesure de Lebesgue dm. On considère la projection $\pi : V \to V' = V/M$ et on munit V' de la mesure de Lebesgue quotient. On pose, quand cela a un sens,

$$\mathscr{S}_M(f)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\dim M}} \int_M f(z+im)\,dm, \qquad z \in \mathsf{T}(\Omega). \tag{3.1.5}$$

LEMME 3.1.6. — *Soit $\Omega \subset V$ et $f : \mathsf{T}(\Omega) \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe M-contrôlée. Soit M' un sous-espace vectoriel de M et Ω' l'image de Ω par la projection $V \to V/M'$. Alors, l'intégrale qui définit $\mathscr{S}_{M'}(f)$ converge en tout $z \in \mathsf{T}(\Omega)$ et définit une fonction holomorphe M/M'-contrôlée sur $\mathsf{T}(\Omega')$.*

Démonstration. — Comme f est M-contrôlée, il existe une fonction $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$ et, pour tout compact $K \subset \mathsf{T}(\Omega)$, un réel $c(K) > 0$ de sorte que pour tout $v \in V$ et tout $z \in K$, on ait $|f(z+iv)| \leq c(K)\kappa(v)$. La condition (3.1.1, d) des classes de contrôles jointe au théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que l'intégrale qui définit $\mathscr{S}_{M'}(f)$ converge et que la somme est une fonction holomorphe sur $\mathsf{T}(\Omega)$. Par construction, cette fonction est iM'-invariante. Comme elle est analytique, elle est donc invariante par M' et définit ainsi une fonction holomorphe sur $\mathsf{T}(\Omega')$. De plus, si π désigne la projection $V \to V/M'$, pour tout $z \in K$ et tout $v \in V$, on a

$$|\mathscr{S}_{M'}(f)(\pi(z)+i\pi(v))| \leq c(K) \int_{M'} \kappa(v+m')\,dm' = c(K)\kappa'(\pi(v))$$

où κ' appartient par définition à $\mathscr{D}(M/M', V/M')$. Tout compact de $\mathsf{T}(\Omega')$ étant de la forme $\pi(K)$ pour un compact K de $\mathsf{T}(\Omega)$, le lemme est ainsi démontré. □

3.1.7. Fonction caractéristique d'un cône. — Soit Λ un cône convexe polyédral ouvert de V. La fonction caractéristique de Λ est la fonction sur $\mathsf{T}(\Lambda)$ définie par l'intégrale convergente

$$\mathsf{X}_\Lambda(z) = \int_{\Lambda^*} e^{-\langle z, v^*\rangle}\, dv^*, \tag{3.1.8}$$

où $\Lambda^* \subset V^*$ est le cône dual de Λ, V^* étant muni de la mesure de Lebesgue dv^* duale de la mesure dv.

Si Λ est simplicial, c'est-à-dire qu'il existe $n = \dim V$ formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_n$ telles que $v \in \Lambda$ si et seulement si $\ell_j(v) > 0$ pour tout j, alors

$$\mathsf{X}_\Lambda(z) = \|d\ell_1 \wedge \dots \wedge d\ell_n\| \prod_{j=1}^n \frac{1}{\ell_j(z)}.$$

(On a noté $\|d\ell_1 \wedge \dots \wedge d\ell_n\|$ le volume du parallélépipède fondamental dans V^* de base les ℓ_j.) Dans le cas général, toute triangulation de Λ^* par des cônes simpliciaux permet d'exprimer X_Λ sous la forme d'une somme de fractions rationnelles de ce type. Elle se prolonge ainsi en une fonction rationnelle sur $\mathsf{T}(V)$ dont les pôles sont exactement les hyperplans de $V_{\mathbf{C}}$ définis par les équations des faces de Λ. Elle est de plus strictement positive sur Λ.

Une autre façon de construire un cône est de s'en donner des générateurs, autrement dit de l'écrire comme *quotient* d'un cône simplicial. À ce titre, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1.9. — *Soit Λ un cône polyédral convexe ouvert de V dont l'adhérence $\overline{\Lambda}$ ne contient pas de droite. Soit M un sous-espace vectoriel de V tel que $\overline{\Lambda} \cap M = \{0\}$. On note π la projection $V \to V' = V/M$.*

La restriction à $\mathsf{T}(\Lambda)$ de la fonction X_Λ est M-contrôlée (pour la classe $\mathscr{D}^{\max}(M, V)$). L'intégrale qui définit $\mathscr{S}_M(\mathsf{X}_\Lambda)$ converge donc absolument et pour tout $z \in \mathsf{T}(\Lambda)$, on a

$$\mathscr{S}_M(\mathsf{X}_\Lambda)(z) = \mathsf{X}_{\Lambda'}(\pi(z)).$$

Remarque 3.1.10. — Les hypothèses impliquent que $\overline{\Lambda}'$ ne contient pas de droite. En effet, s'il existait un vecteur non nul de $\overline{\Lambda}' \cap -\overline{\Lambda}'$, il existerait deux vecteurs v_1 et v_2 de $\overline{\Lambda}$ tels que $v_1 + v_2 \in M$ mais $v_1 \notin M$. Comme $\overline{\Lambda} \cap M = \{0\}$, $v_1 = -v_2$ ce qui contredit l'hypothèse que $\overline{\Lambda}$ ne contient pas de droite.

Démonstration. — La preuve est une adaptation des paragraphes 7.1 et 7.2 de [**19**]. Soit (e_i) une famille minimale de générateurs de Λ. Chaque face de Λ^* dont la dimension est $\dim V - 1$ engendre un sous-espace vectoriel qui est l'orthogonal d'un des e_i.

Comme $M \cap \overline{\Lambda} = \{0\}$, il existe une forme linéaire $\ell \in V^*$ qui est nulle sur M mais qui n'appartient à aucune face de Λ^* ; posons $H = \ker \ell$. Soit H' un supplémentaire de $\mathbf{R}\ell$ dans V^*. Si $\varphi \in V^*$ et $t \in \mathbf{R}$ sont tels que $\varphi + t\ell \in \Lambda^*$, on doit avoir pour tout générateur e_j de Λ l'inégalité $\varphi(e_j) + t\ell(e_j) > 0$, soit (rappelons que $\ell(e_j)$ n'est pas nul), $t > -\varphi(e_j)/\ell(e_j)$ quand $\ell(e_j) > 0$ et $t < -\varphi(e_j)/\ell(e_j)$ quand $\ell(e_j) < 0$. Soit alors $I(\varphi) =]h_1(\varphi), h_2(\varphi)[$ l'intervalle de $\mathbf{R}$ défini par ces inégalités. (Si tous les $\ell(e_j)$ sont positifs, c'est-à-dire $\ell \in \Lambda^*$, on a $h_1 \equiv -\infty$, tandis que s'ils sont tous négatifs, $h_2 \equiv +\infty$.) Les fonctions h_1 et h_2 sont linéaires par morceaux par rapport à un éventail de H' qu'on peut supposer complet et régulier (voir par exemple [**12**] pour la définition, ou [**2**]).

Alors, si $v \in \mathsf{T}(\Lambda)$ et $m \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{X}_\Lambda(v+im) &= \int_{V^*} \mathbf{1}_{\Lambda^*}(\varphi) e^{-\langle v+im,\varphi\rangle}\, d\varphi \\
&= \int_{H'} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\Lambda^*}(\varphi + t\ell) e^{-\langle v+im,\varphi\rangle} e^{-t\langle v,\ell\rangle}\, dt\, d\varphi \\
&= \int_{H'} \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} e^{-\langle v+im,\varphi\rangle} e^{-t\langle v,\ell\rangle}\, dt\, d\varphi \\
&= \int_{H'} e^{-\langle v+im,\varphi\rangle} \frac{e^{-h_1(\varphi)\langle v,\ell\rangle} - e^{-h_2(\varphi)\langle v,\ell\rangle}}{\langle v,\ell\rangle}\, d\varphi
\end{aligned}$$

de sorte que la fonction $H \to \mathbf{C}$ telle que $m \mapsto \mathsf{X}_\Lambda(v+im)$ est (à une constante multiplicative près) la différence des transformées de Fourier des fonctions

$$H' \to \mathbf{C}, \quad \varphi \mapsto e^{-\langle v,\varphi + h_j(\varphi)\ell\rangle}$$

pour $j = 1$ et 2.

Comme $v \in \mathsf{T}(\Lambda)$ et $\varphi + h_j(\varphi)\ell$ appartient au bord de Λ^*, $\langle v, \varphi + h_j(\varphi)\ell\rangle$ est de partie réelle strictement positive, à moins que $\varphi = 0$. Soit K un compact de $\mathsf{T}(\Lambda)$. Il résulte alors des estimations des transformées de Fourier de fonctions linéaires par morceaux et positives (voir [**2**], proposition 2.3.2, p. 614, et aussi *infra*, prop. 4.2.4) une majoration de la fonction

$$f_{\Lambda,K}(m) := \sum_{v\in K} |\mathsf{X}_\Lambda(v+im)|$$

de la forme

$$f_{\Lambda,K}(m) \leq c(K) \sum_\alpha \prod_{j=1}^{\dim H} \frac{1}{(1 + |\langle m, \ell_{\alpha,j}\rangle|)^{1+1/\dim H}},$$

où pour tout α, la famille $(\ell_{\alpha,j})_j$ est une base de H^*. D'après le lemme 3.1.11 ci-dessous, la fonction $f_{\Lambda,K}$ appartient à $\mathscr{D}^{\max}(M,V)$.

La fonction $m \mapsto \mathsf{X}_\Lambda(v+im)$ est donc absolument intégrable sur M. C'est la transformée de Fourier de la fonction $\varphi \mapsto \mathbf{1}_{\Lambda^*}(\varphi)e^{-\langle v,\varphi\rangle}$ dont il est facile de voir qu'elle est intégrable sur tout sous-espace et donc aussi $M^\perp$. La formule de Poisson s'applique (après un léger argument de régularisation) et s'écrit

$$\int_M \mathsf{X}_\Lambda(v+im)\, dm = (2\pi)^{\dim M} \int_{\Lambda^*\cap M^\perp} e^{-\langle v,\varphi\rangle}\, d\varphi.$$

Or, l'application $V \to V'$ identifie $(V')^*$ à $M^\perp$, et $\Lambda^* \cap M^\perp$ à $(\Lambda')^*$. Ainsi, on obtient

$$\mathscr{S}_M(\mathsf{X}_\Lambda)(v) = \int_{(\Lambda')^*} e^{-\langle \pi(v), \varphi\rangle}\, d\varphi = \mathsf{X}_{\Lambda'}(\pi(v)).$$

□

LEMME 3.1.11. — *Soit V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension d, $(\ell_1, \dots, \ell_d)$ une base de V^* et f la fonction $v \mapsto \prod_{j=1}^d (1+|\ell_j(v)|)^{-1-1/d}$. Alors, $f \in \mathscr{D}^{\max}(V, V)$.*

Démonstration. — Soit M un sous-espace vectoriel de V de dimension m. Quitte à réordonner les indices, on peut supposer que M est l'image d'une application linéaire $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^d = V$ de la forme $t = (t_1, \dots, t_m) \mapsto (t_1, \dots, t_m, \varphi_{m+1}(t), \dots, \varphi_d(t))$. Si on réalise V/M par son supplémentaire $\{0\}^m \times \mathbf{R}^{d-m}$, la fonction $f_M : v \mapsto \int_M f(v+m)\, dm$ est donnée par l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^m} \frac{1}{(1+|t_1|)^{1+1/d}} \cdots \frac{1}{(1+|t_m|)^{1+1/d}} \prod_{j=m+1}^{d} \frac{1}{(1+|v_j+\varphi_j(t)|)^{1+1/d}}\, dt_1 \dots dt_m.$$

Elle est dominée par l'intégrale convergente

$$\int_{\mathbf{R}^m} \frac{1}{(1+|t_1|)^{1+1/d}} \cdots \frac{1}{(1+|t_m|)^{1+1/d}}\, dt_1 \dots dt_m$$

et le théorème de convergence dominée implique alors que pour tout vecteur $v = (0, \dots, 0, v_{m+1}, \dots, v_d)$ distinct de 0,

$$\lim_{s \to +\infty} f_M(sv) = 0.$$

Le lemme est ainsi démontré. □

Définition 3.1.12. — Soient C un ouvert convexe de V ayant 0 pour point adhérent et Λ un cône polyédral ouvert contenant C.

Soit $\Phi \subset V^*$ une famille de formes linéaires deux à deux non proportionnelles définissant les faces de Λ.

On note $\mathscr{H}_M(\Lambda; C)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $f : \mathsf{T}(C) \to \mathbf{C}$ telles qu'il existe un voisinage convexe B de 0 dans V de sorte que la fonction g définie par

$$g(z) = f(z) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{\varphi(z)}{1+\varphi(z)}$$

admet un prolongement holomorphe M-contrôlé dans $\mathsf{T}(B)$.

Par le théorème d'extension de Bochner (voir par exemple [**13**]), une telle fonction s'étend en une fonction holomorphe sur le tube de base l'enveloppe convexe C' de $B \cup C$. En particulier, il n'aurait pas été restrictif de prendre pour C l'intersection du cône Λ avec un voisinage convexe de 0 dans V.

On constate aussi que f est nécessairement M-contrôlée dans $\mathsf{T}(C)$. Enfin, il est facile de vérifier que $\mathscr{H}_M(\Lambda; C)$ ne dépend pas du choix des formes linéaires qui définissent les faces de Λ.

3.1.13. Si Λ est un cône polyédral et si M est un sous-espace vectoriel de V tel que l'image de $\overline{\Lambda}$ dans V/M ne contient pas de droite, la proposition 3.1.9 implique donc que la fonction X_Λ appartient à l'espace $\mathscr{H}_M(\Lambda;\Lambda)$ défini par la classe de contrôle $\mathscr{D}^{\max}$.

Le théorème principal de cette section est le suivant.

THÉORÈME 3.1.14. — *Soit $M \subset V$ un sous-espace vectoriel muni d'une mesure de Lebesgue.*

Soit C l'intersection de Λ avec un voisinage convexe de 0 et soit $f \in \mathscr{H}_M(\Lambda; C)$. Soit M' un sous-espace vectoriel de M, π la projection $V \to V' = V/M'$, $\Lambda' = \pi(\Lambda)$ et $C' = \pi(C)$.

Alors, la fonction $\mathscr{S}_{M'}(f)$ appartient à $\mathscr{H}_{M/M'}(\Lambda'; C')$.

Si de plus l'adhérence du cône Λ' ne contient pas de droite et si pour tout $z \in \Lambda$,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(sz)}{\mathsf{X}_\Lambda(sz)} = 1,$$

alors pour tout $z' \in \Lambda'$,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\mathscr{S}_{M'}(f)(sz')}{\mathsf{X}_{\Lambda'}(sz')} = 1.$$

COROLLAIRE 3.1.15. — *Supposons de plus que f est la restriction à $\Lambda \cap C$ d'une fonction holomorphe M-contrôlée sur Λ. Alors, la fonction $\mathscr{S}_M(f)$ sur V' est méromorphe dans un voisinage convexe de Λ', ses pôles étant simples définis par les faces (de codimension 1) de Λ'.*

3.2. Démonstration du théorème

D'après le lemme 3.1.6, la fonction $\mathscr{S}_{M'}(f)$ est holomorphe et M/M'-contrôlée sur $\mathsf{T}(C')$. Le but est de montrer qu'elle y est la restriction d'une fonction méromorphe dont on contrôle les pôles et la croissance. La démonstration est fondée sur l'application successive du théorème des résidus pour obtenir le prolongement méromorphe. La définition des classes de contrôle est faite pour assurer l'intégrabilité ultérieure de chacun des termes obtenus.

Par récurrence, il suffit de démontrer le résultat lorsque $\dim M' = 1$. Soit m_0 un générateur de M'. Munissons la droite $\mathbf{R}m_0$ de la mesure de Lebesgue $d\rho$. Soit $\Phi \subset V^*$ une famille de formes linéaires deux à deux non proportionnelles positives sur Λ et dont les noyaux sont les faces de Λ.

Soit B un ouvert convexe et symétrique par rapport à l'origine, assez petit de sorte que pour tout $\varphi \in \Phi$ et tout $v \in B$, $|\varphi(v)| < 1$ et que la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{\varphi\in\Phi} \frac{\varphi(z)}{1+\varphi(z)}$$

admette un prolongement holomorphe M-contrôlé sur $\mathsf{T}(B)$. L'intégrale à étudier est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z+itm_0) \prod_{\varphi\in\Phi} \frac{1+\varphi(z+itm_0)}{\varphi(z+itm_0)}\, dt.$$

On veut déplacer la droite d'intégration vers la gauche. Fixons $\tau > 0$ tel que $2\tau m_0 \in B$. Ainsi, si $\operatorname{Re}(z) \in \frac{1}{2}B$, $z + (u+it)m_0$ appartient à $\mathsf{T}(B)$ pour tout $u \in [-\tau; 0]$ et tout $t \in \mathbf{R}$.

Notons Φ^+, Φ^- et Φ^0 les ensembles des $\varphi \in \Phi$ tels que respectivement $\varphi(m_0) > 0$, $\varphi(m_0) < 0$ et $\varphi(m_0) = 0$. Soit $B_1 \subset \frac{1}{2}B$ l'ensemble des $v \in \frac{1}{2}B$ tels que pour tout $\varphi \in \Phi^+$, $|\varphi(v)| < \frac{\tau}{2}\varphi(m_0)$.

Dans la bande $-\tau \leq s \leq 0$, les pôles de la fonction holomorphe

$$s \mapsto g(z + sm_0) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{1 + \varphi(z + sm_0)}{\varphi(z + sm_0)}$$

sont ainsi donnés par

$$s_\varphi(z) = -\frac{\varphi(z)}{\varphi(m_0)}, \quad \varphi \in \Phi^+.$$

Le pôle $s = s_\varphi(z)$ est simple si et seulement si pour tout $\psi \in \Phi^+$ tel que $\psi \neq \varphi$,

$$\varphi(z)\psi(m_0) - \psi(z)\varphi(m_0) \neq 0.$$

Comme φ et ψ sont non proportionnelles, $\psi(m_0)\varphi - \varphi(m_0)\psi$ est une forme linéaire non nulle ; notons $B_1^\dagger \subset B_1$ le complémentaire des hyperplans qu'elles définissent lorsque $\varphi \neq \psi$ parcourent les éléments de Φ^+.

Si $z \in \mathsf{T}(B_1^\dagger)$ et si $T > \max\{|\operatorname{Im}(s_\varphi(z))| \ ; \ \varphi \in \Phi^+\}$, la formule des résidus pour le contour délimité par le rectangle $-\tau \leq \operatorname{Re}(s) \leq 0$, $-T \leq \operatorname{Im}(s) \leq T$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} g(z + itm_0) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{1 + \varphi(z + itm_0)}{\varphi(z + itm_0)}\, dt \\
= \sum_{\varphi \in \Phi^+} \frac{2i\pi}{\varphi(m_0)} g(z + s_\varphi(z)m_0) \prod_{\psi \neq \varphi} \frac{1 + \psi(z + s_\varphi(z)m_0)}{\psi(z + s_\varphi(z)m_0)} \\
+ \int_{-T}^{T} g(z - \tau m_0 + itm_0) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{1 + \varphi(z - \tau m_0 + itm_0)}{\varphi(z - \tau m_0 + itm_0)}\, dt \\
+ \int_{0}^{-\tau} g(z + sm_0 + iTm_0) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{1 + \varphi(z + sm_0 + iTm_0)}{\varphi(z + sm_0 + iTm_0)}\, ds \\
+ \int_{-\tau}^{0} g(z + sm_0 - iTm_0) \prod_{\varphi \in \Phi} \frac{1 + \varphi(z + sm_0 - iTm_0)}{\varphi(z + sm_0 - iTm_0)}\, ds.
\end{aligned}$$

Lorsque $T \to +\infty$, l'hypothèse que g est M-contrôlée et l'axiome (3.1.1,c) des classes de contrôles impliquent que ces deux dernières intégrales (sur les segments horizontaux du rectangle) tendent vers 0. De même, l'axiome (3.1.1,d) assure la convergence des deux premières intégrales vers les intégrales correspondantes de $-\infty$ à $+\infty$.

Par suite, si $z \in \mathsf{T}(B_1^\dagger \cap \Lambda)$, on a

$$\text{(3.2.1)} \quad \mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)(z) = \sum_{\varphi \in \Phi^+} g(z + s_\varphi(z)m_0) \prod_{\psi \neq \varphi} \frac{1 + \psi(z + s_\varphi(z)m_0)}{\psi(z + s_\varphi(z)m_0)}$$
$$+ \prod_{\varphi \in \Phi^0} \frac{1+\varphi(z)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} g(z - \tau m_0 + itm_0) \prod_{\varphi \in \Phi \setminus \Phi^0} \frac{1 + \varphi(z - \tau m_0 + itm_0)}{\varphi(z - \tau m_0 + itm_0)}\, dt.$$

Il résulte alors des axiomes (3.1.1,e) et (3.1.1,d) des classes de contrôles que la fonction

$$\text{(3.2.2)} \qquad z \mapsto \mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)(z) \prod_{\varphi \in \Phi^0} \frac{\varphi(z)}{1+\varphi(z)} \prod_{\varphi \in \Phi^+} \prod_{\psi \notin \Phi^0 \cup \{\varphi\}} \frac{\varphi(s + s_\psi(z)m_0)}{1 + \psi(s + s_\varphi(z)m_0)}$$

définie sur $\mathsf{T}(B_1^\dagger \cap \Lambda)$ s'étend en une fonction holomorphe M/M'-contrôlée sur $\mathsf{T}(\pi(B_1^\dagger))$. En particulier, $\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathsf{T}(B_1^\dagger)$ et les pôles de $\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)$ sont donnés par une famille finie de formes linéaires. Le lemme suivant les interprète géométriquement.

LEMME 3.2.3. — *Les faces de Λ' sont les noyaux des formes linéaires deux à deux non proportionnelles sur $V/\mathbf{R}m_0$ $\varphi \in \Phi^0$ et $\varphi - \frac{\varphi(m_0)}{\psi(m_0)}\psi$ pour $\varphi \in \Phi^+$ et $\psi \in \Phi^-$.*

De plus, si φ et $\psi \in \Phi^+$, le noyau de $\varphi - \frac{\varphi(m_0)}{\psi(m_0)}\psi$ rencontre Λ'.

Démonstration. — Un vecteur $x \in V$ appartient à Λ si et seulement si $\varphi(x) > 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$. Par suite, $\pi(x) \in \Lambda'$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(x - \alpha m_0) > 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$. Si $\varphi \in \Phi^0$, cette condition est exactement $\varphi(x) > 0$. Pour les autres φ, elle devient

$$\max_{\varphi \in \Phi^-} \frac{\varphi(x)}{\varphi(m_0)} < \alpha < \min_{\varphi \in \Phi^+} \frac{\varphi(x)}{\varphi(m_0)}$$

d'où la première partie du lemme.

Pour la seconde, soit φ et ψ deux éléments distincts de Φ^+. Si le noyau de $\varphi - \frac{\varphi(m_0)}{\psi(m_0)}\psi$ ne recontre pas Λ', quitte à permuter φ et ψ, on a

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(m_0)} > \frac{\psi(v)}{\psi(m_0)}$$

pour tout $v \in \Lambda$ et cela contredit le fait que φ et ψ définissent deux faces distinctes de Λ. □

On sait que $\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)$ est holomorphe sur $\mathsf{T}(\Lambda')$. Il résulte du lemme que les formes linéaires $\psi + s_\varphi(z)\varphi$ avec $\varphi \in \Phi^+$ et $\psi \notin \Phi^0 \cup \{\varphi\}$ sont des pôles apparents dès que $\psi \in \Phi^+$. Les autres correspondent aux faces de Λ' !

Autrement dit, nous avons déjà prouvé que $\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)$ est la restriction à $\mathsf{T}(\pi(B_1))$ d'une fonction méromorphe dont les pôles (simples) sont donnés par les faces de Λ'. Montrons comment contrôler la croissance de $\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)$ dans les bandes verticales.

LEMME 3.2.4. — *Soit V un espace vectoriel, M un sous-espace vectoriel, B un voisinage de 0 dans V. Soit h une fonction holomorphe sur $\mathsf{T}(B)$ et soit ℓ une forme linéaire sur V. Si la fonction $z \mapsto h(z)\frac{\ell(z)}{1+\ell(z)}$ est M-contrôlée, h est M-contrôlée.*

Démonstration. — Il faut montrer que h est M-contrôlée dans un voisinage de tout point de B. Soit donc $x_0 \in B$ et K un voisinage compact de x_0 contenu dans B. Soit $\kappa \in \mathscr{D}(M,V)$ telle que pour tout $x \in K$ et tout $y \in V$,

$$\left| h(x+iy)\frac{\ell(x+iy)}{1+\ell(x+iy)} \right| \leq \kappa(y).$$

Supposons d'abord que $\ell(x_0) \neq 0$. Si $\rho = |\ell(x_0)|/2 > 0$, il existe un voisiange compact $K_1 \subset K$ de x_0 où $|\ell| \geq \rho$. Alors, pour tout $x \in K_1$ et tout $y \in V$, on a

$$|h(x+iy)| \leq \kappa(y)\frac{1+|\ell(x+iy)|}{\ell(x+iy)} \leq \frac{1+\rho}{\rho}\kappa(y),$$

ce qui prouve que h est M-contrôlée dans K_1.

Si $\ell(x_0) = 0$, soit $u \in V$ tel que $\ell(u) = 1$, K_1 un voisinage compact de x_0 assez petit et $\rho > 0$ tels que pour tout $t \in [-1;1]$ et tout $x \in K_1$, $x + t\rho u \in K$. La fonction $s \mapsto h(x+iy+s\rho u)$ est une fonction holomorphe sur le disque unité fermé $|s| \leq 1$. D'après le principe du maximum, on a donc pour tout $x+iy \in \mathsf{T}(K_1)$,

$$|h(x+iy)| \leq \sup_{|s|\leq 1} |h(x+iy+s\rho u)| = \sup_{|s|=1} |h(x+iy+s\rho u)| \leq \frac{1+\rho}{\rho} \sup_{|s|\leq 1} \kappa(y+su).$$

L'axiome (3.1.1,b) assure alors l'existence d'une fonction $\kappa_1 \in \mathscr{D}(M,V)$ telle que pour tout $x+iy \in \mathsf{T}(K_1)$,

$$|h(x+iy)| \leq \kappa_1(y).$$

La fonction h est donc M-contrôlée dans un voisinage de x_0. $\square$

Il reste à démontrer que si pour tout $z \in \Lambda$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(tz)/\mathsf{X}_\Lambda(tz) = 1$, alors

$$\lim_{t\to 0^+} \mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)(tz')/\mathsf{X}_{\Lambda'}(tz') = 1.$$

Comme $X_\Lambda(tz) = t^{-\dim V} X_\Lambda(z)$, l'hypothèse $f(tz) \sim \mathsf{X}_\Lambda(tz)$ se récrit

$$\lim_{t\to 0} t^{\dim V - \#\Phi} g(tz) = \mathsf{X}_\Lambda(z).$$

D'autre part, la formule (3.2.1) donne

$$
\begin{aligned}
&t^{-1+\dim V}\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)(tz)\\
&\qquad = t^{-1+\dim V}\sum_{\varphi\in\Phi^+} g(tz+s_\varphi(tz)m_0)\prod_{\psi\neq\varphi}\frac{1+\psi(tz+s_\varphi(tz)m_0)}{\psi(tz+s_\varphi(tz)m_0)}\\
&\qquad\quad + t^{-1+\dim V}\prod_{\varphi\in\Phi^0}\frac{1+\varphi(tz)}{\varphi(tz)}\times\\
&\qquad\qquad \times\int_{-\infty}^{\infty} g(tz-\tau m_0+itm_0)\prod_{\varphi\in\Phi\setminus\Phi^0}\frac{1+\varphi(tz-\tau m_0+itm_0)}{\varphi(tz-\tau m_0+itm_0)}\,dt\\
&\qquad = \sum_{\varphi\in\Phi^+} t^{\dim V-\#\Phi} g(t(z+s_\varphi(z)m_0))\prod_{\psi\neq\varphi}\frac{1+t\psi(z+s_\varphi(z)m_0)}{\psi(z+s_\varphi(z)m_0)}\\
&\qquad\quad + t^{-1+\dim V-\#\Phi^0}\prod_{\varphi\in\Phi^0}\frac{1+t\varphi(tz)}{\varphi(z)}\times\\
&\qquad\qquad \times\int_{-\infty}^{\infty} g(tz-\tau m_0+itm_0)\prod_{\varphi\in\Phi\setminus\Phi^0}\frac{1+\varphi(tz-\tau m_0+itm_0)}{\varphi(tz-\tau m_0+itm_0)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Un vecteur non nul de V ne peut appartenir qu'à au plus $\dim V-1$ faces de Λ et seuls les générateurs de Λ appartiennent à $\dim V-1$ faces. Comme m_0 est supposé n'être pas un générateur de Λ, $\#\Phi^0\leq\dim V-2$. Lorsque t tend vers 0, on a donc

$$
\lim t^{-1+\dim V}\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f)(tz) = \sum_{\varphi\in\Phi^+}\mathsf{X}_\Lambda(z+s_\varphi(z)m_0)\prod_{\psi\neq\varphi}\frac{1}{\psi(z+s_\varphi(z)m_0)}
$$

où le second membre ne dépend plus de f. Comme on peut appliquer cette formule à $f=\mathsf{X}_\Lambda$, on obtient donc

$$
\begin{aligned}
\lim t^{1-\dim V}(\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(f))(tz) &= \lim t^{1-\dim V}(\mathscr{S}_{\mathbf{R}m_0}(\mathsf{X}_\Lambda))(tz)\\
&= \lim t^{1-\dim V}\mathsf{X}_{\Lambda'}(tz) = \mathsf{X}_{\Lambda'}(z).
\end{aligned}
$$

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 3.2.5. — La démonstration s'adapte sans peine lorsque f dépend uniformément de paramètres supplémentaires.

4. Variétés toriques

Dans ce paragraphe, nous montrons comment les raffinements analytiques du paragraphe 3 permettent de préciser le développement asymptotique obtenu par Batyrev–Tschinkel dans [**4**] pour la fonction zêta des hauteurs d'une variété torique. Les résultats techniques que nous rappelons à l'occasion seront réutilisés au paragraphe suivant, lorsque nous traiterons le cas d'une fibration en variétés toriques.

4.1. Préliminaires

4.1.1. Rappels adéliques. — Notons $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$ le spectre de l'anneau des entiers de F. Si v est une place de F, on définit la norme $\|\cdot\|_v$ sur F_v de la manière habituelle, comme le *module* associé à une mesure de Haar additive sur F_v. En particulier, si π_v est une uniformisante en une place finie v, $\|\pi_v\|_v$ est l'inverse du cardinal du corps résiduel en v.

Soit G un tore déployé de dimension d sur S. Désignons par $\mathbf{K}_\infty$ la collection de ses sous-groupes compacts maximaux aux places à l'infini et $\mathbf{K}_G = \prod_{v\nmid\infty} G(\mathfrak{o}_v) \prod_{v|\infty} \mathbf{K}_v \subset G(\mathbf{A}_F)$. Il nous faut faire quelques rappels sur la structure du groupe $\mathscr{A}_G$ des caractères de $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$. On a un homomorphisme de noyau fini $\mathscr{A}_G \to \bigoplus_{v|\infty} X^*(G)_\mathbf{R}$, $\chi \mapsto \chi_\infty$ obtenu en associant à un caractère adélique son *type à l'infini*, c'est-à-dire sa restriction au sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ dont les composantes aux places finies sont triviales. En choisissant une norme sur $X^*(G)_\mathbf{R}$, on obtient ainsi une « norme » $\chi \mapsto \|\chi_\infty\|$ sur $\mathscr{A}_G$.

Il existe enfin un homomorphisme $X^*(G)_\mathbf{R} \to \mathscr{A}_G$, tel que l'image du caractère algébrique $\chi \in X^*(G)$ est le caractère adélique $\mathbf{g} \mapsto |\chi(\mathbf{g})|^i$ dont le type à l'infini s'identifie à χ sur chaque composante.

Le quotient $\mathscr{A}_G/X^*(G)_\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini et de rang $(\rho-1)d$ (où $\rho = r_1 + r_2$, r_1 et r_2 désignant comme d'habitude les nombres de places réelles et complexes) et l'on peut fixer une décomposition $\mathscr{A}_G = X^*(G)_\mathbf{R} \oplus \mathscr{U}_G$, par exemple à l'aide d'un scindage de la suite exacte

$$1 \to \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_F)^1 \to \mathbf{G}_m(\mathbf{A}_F) \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{R}^* \to 1.$$

(Rappelons que G est supposé déployé.)

4.1.2. Rappels sur les variétés toriques. — Notons $M = X^*(G)_\mathbf{R}$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie d. Considérons une compactification équivariante $\mathscr{X}$ de G, lisse sur S. D'après la théorie des variétés toriques (cf. par exemple [**14**], [**12**]), $\mathscr{X}$ est définie par un éventail complet et régulier Σ de $N := \operatorname{Hom}(M, \mathbf{R})$ formé de cônes convexes simpliciaux rationnels. Il existe ainsi une famille (minimale) $(e_j)_{j\in J}$ de vecteurs de N telle que tout cône $\sigma \in \Sigma$ soit engendré par une sous-famille $(e_j)_{j\in J_\sigma}$ de cardinal $\dim \operatorname{vect}(\sigma)$. On note $\Sigma(d)$ l'ensemble des cônes de Σ de dimension d.

L'espace vectoriel $\mathrm{PL}(\Sigma)$ des fonctions continues $N \to \mathbf{R}$ dont la restriction à chaque cône de Σ est linéaire est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, d'ailleurs égale à $\#J$; munissons le d'une norme arbitraire. L'espace vectoriel $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)_\mathbf{R}$ est isomorphe à $\mathrm{PL}(\Sigma)$; il possède une base canonique formée des fibrés en droites G-linéarisés associés aux diviseurs G-invariants sur $\mathscr{X}_F$. À chaque e_j correspond un tel diviseur D_j ; à un diviseur G-invariant $D = \sum_j \lambda_j D_j$ correspond l'unique fonction $\varphi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$ telle que $\varphi(e_j) = \lambda_j$. Dans cette description, le cône des diviseurs effectifs correspond simplement l'ensemble des éléments de $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)$ dont les coordonnées (λ_j) vérifient $\lambda_j \geq 0$ pour tout j. Plus généralement, on notera Λ_t l'ensemble des éléments de $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)$ tels que $\lambda_j > t$ pour tout j ; le cône ouvert Λ_0 est aussi noté $\mathrm{PL}^+(\Sigma)$ et encore $\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{X}_F)$.

Cette base (D_j) de $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)$ et l'homomorphisme canonique $\iota : X^*(G) \to \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$ induisent des sous-groupes à un paramètre $\mathbf{G}_m \to G$, d'où, pour tout caractère $\chi \in \mathscr{A}_G$, des caractères χ_j de $\mathbf{G}_m(F)\backslash\mathbf{G}_m(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_{\mathbf{G}_m}$, autrement dit des caractères de Hecke.

Les fibrés en droites sur $\mathscr{X}_F$ seront systématiquement munis de leur métrique adélique canonique introduite notamment dans [**2**]. Cela nous fournit un homomorphisme canonique $\operatorname{Pic}(\mathscr{X}_F) \to \widehat{\operatorname{Pic}}(\mathscr{X})$ qui induit un homomorphisme

$$\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F) \to \widehat{\operatorname{Pic}}^{G,\mathbf{K}}(\mathscr{X}). \tag{4.1.3}$$

On vérifie aisément, par exemple sur les formules données dans [**2**], que les sous-groupes compacts maximaux aux places archimédiennes agissent de manière isométrique. De plus, le choix d'une G-linéarisation fournit une unique F-droite de sections ne s'annulant pas sur G, donc en particulier une fonction hauteur sur les points adéliques de $\mathscr{X}_F$ comme dans la définition 1.3.3. Cette fonction s'étend en une application « bilinéaire »

$$H : \operatorname{PL}(\Sigma)_{\mathbf{C}} \times G(\mathbf{A}_F) \to \mathbf{C}^*.$$

(On a identifié $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)_{\mathbf{C}}$ et $\operatorname{PL}(\Sigma)_{\mathbf{C}}$.)

LEMME 4.1.4. — *Soit $m \in X^*(G)$ et notons $\chi_m \in \mathscr{A}_G$ le caractère adélique qu'il définit. On a alors*

$$\chi_m(\mathbf{g}) = H(\iota(m), \mathbf{g})^{-i}.$$

Démonstration. — Par définition, $\iota(m)$ est le fibré en droite trivial sur $\mathscr{X}$ muni de la G-linéarisation dans laquelle G agit par multiplication par le caractère algébrique m. Ainsi, la droite de sections rationnelles G-invariante et ne s'annulant pas sur G est engendrée par le caractère m vu comme fonction rationnelle sur $\mathscr{X}$. La définition de H implique que

$$H(\iota(m), \mathbf{g}) = \prod_v \|m(g_v)\|^{-1} = \|m(\mathbf{g})\|^{-1}.$$

Or,

$$\chi_m(\mathbf{g}) = \|m(\mathbf{g})\|^{i} = H(\iota(m), \mathbf{g})^{-i}.$$

□

4.1.5. Mesures. — Pour toute place v de F, on fixe une mesure de Haar dx_v sur F_v. On suppose que pour presque toute place finie v, la mesure du sous-groupe compact $\mathfrak{o}_v$ est égale à 1. Alors, $dx = \prod_v dx_v$ est une mesure de Haar sur le groupe localement compact $\mathbf{A}_F$. On en déduit pour tout v une mesure de Haar $\mu'_{\mathbf{G}_m,v} = \|x_v\|_v^{-1} dx_v$ sur F_v^*. Pour presque toute place finie v, la mesure de $\mathfrak{o}_v^*$ est égale à $1 - q_v^{-1}$; définissons ainsi, si v est une place finie, $\mu_{\mathbf{G}_m,v} = (1 - q_v^{-1})^{-1}\mu'_{\mathbf{G}_m,v}$. On munit alors $\mathbf{A}_F^*$ de la mesure

$$\prod_v \mu_{\mathbf{G}_m,v} = \prod_{v\nmid\infty} (1 - q_v^{-1})^{-1} \|x_v\|^{-1} dx_v \times \prod_{v\mid\infty} \|x_v\|^{-1} dx_v.$$

Remarquons que $\zeta_{F,v}(1) = (1 - q_v^{-1})^{-1}$ est le facteur local en la place finie v de la fonction zêta de Dedekind du corps F.

Tout $\mathfrak{o}_F$-isomorphisme $G \simeq \mathbf{G}_m^d$ induit alors des mesures de Haar $\mu'_{G,v}$ et $\mu_{G,v} = \zeta_{F,v}(1)^d \mu'_{G,v}$ sur $G(F_v)$ pour toute place v de F, indépendantes de l'isomorphisme. On en déduit aussi une mesure de Haar $\prod \mu_{G,v}$ sur $G(\mathbf{A}_F)$.

D'autre part, le fibré canonique sur $\mathscr{X}$ est métrisé. Peyre a montré dans [**15**] comment en déduire une mesure sur $\mathscr{X}(\mathbf{A}_F)$. Pour toute place v, on dispose d'une mesure $\mu'_{\mathscr{X},v}$ sur $\mathscr{X}(F_v)$ définie par la formule

$$\mu'_{\mathscr{X},v} = \|d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_d\|_v^{-1} \, d\xi_1 \, \ldots \, d\xi_d$$

si $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ est un système arbitraire de coordonnées locales sur $\mathscr{X}(F_v)$. Si l'on restreint la mesure $\mu'_{\mathscr{X},v}$ à $G(F_v)$, on obtient donc

$$H_v(-\rho, x)\mu'_{G,v}, \tag{4.1.6}$$

ρ désignant la fonction de $\mathrm{PL}(\Sigma)$ telle que pour tout j, $e_j \mapsto 1$ (ρ correspond à la classe anticanonique).

Pour presque toute place finie v, on a alors

$$\mu'_{\mathscr{X},v}(\mathscr{X}(F_v)) = q_v^{-d} \# \mathscr{X}(k_v).$$

La décomposition cellulaire des variétés toriques (point n'est besoin ici d'invoquer le théorème de Deligne sur les conjectures de Weil) implique alors que

$$\#\mathscr{X}(k_v) = q_v^d + \operatorname{rang}(\operatorname{Pic} \mathscr{X}_F) q_v^{d-1} + O(q_v^{d-2}).$$

Par suite, le produit infini

$$\prod_{v \nmid \infty} \mu'_v(\mathscr{X}(F_v)) \zeta_{F,v}(1)^{-\operatorname{rang}(\operatorname{Pic} \mathscr{X}_F)}$$

est convergent. Définissons une mesure $\mu_{\mathscr{X},v}$ sur $\mathscr{X}(F_v)$ par

$$\mu_{\mathscr{X},v} = \zeta_{F,v}(1)^{-\operatorname{rang} \operatorname{Pic} \mathscr{X}_F} \mu'_{\mathscr{X},v}$$

si v est finie et $\mu_{\mathscr{X},v} = \mu'_{\mathscr{X},v}$ si v est archimédienne. Ainsi, le produit infini $\prod_v \mu_{\mathscr{X},v}$ converge et définit une mesure, dite *mesure de Tamagawa* sur $\mathscr{X}(\mathbf{A}_F)$. Le nombre de Tamagawa de $\mathscr{X}(\mathbf{A}_F)$ est alors définie par

$$\tau(\mathscr{X}) = \mu(\mathbf{A}_F/F)^{-d} \operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s)^{\operatorname{rang}(\operatorname{Pic} \mathscr{X}_F)} \mu_{\mathscr{X}}(\mathbf{A}_F). \tag{4.1.7}$$

Remarque 4.1.8. — La différence de formulation avec la définition que donne Peyre dans [**15**] n'est qu'apparente. Peyre a choisi la mesure sur F_v de la façon suivante : si v est une place finie, $dx_v(\mathfrak{o}_v) = 1$, si v est une place réelle, dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$ et si v est une place complexe, dx_v est le double de la mesure usuelle sur $\mathbf{C}$. Le volume de $\mathbf{A}_F/F$ est alors égal à $\Delta_F^{1/2}$.

4.2. Transformations de Fourier

On s'intéresse à la transformée de Fourier de la fonction $g \mapsto H(-\lambda, g)$ sur le groupe abélien localement compact $G(\mathbf{A}_F)$. Rappelons qu'on a noté Λ_1 l'ensemble des $\lambda \in \mathrm{PL}(\Sigma)$ tels que $\lambda_j > 1$ pour tout j. Alors, si $\lambda \in \mathsf{T}(\Lambda_1)$, la fonction $g \mapsto H(-\lambda, g)$ est intégrable (cf. [**19**], § 3.4), si bien que la transformée de Fourier existe pour tout $\lambda \in \mathsf{T}(\Lambda_1)$. Elle se décompose par construction en un produit $\check{H} = \check{H}_f \times \check{H}_\infty$, où

$$\check{H}_f = (\operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s))^{-d} \prod_{v \nmid \infty} (1 - q_v^{-1})^{-d} \check{H}_v$$

et $\check{H}_\infty = \prod_{v \mid \infty} \check{H}_v$ sont les produits des intégrales locales (renormalisées) aux places finies et archimédiennes. (Les transformées de Fourier locales existent même dès que pour tout j, $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$.)

Lemme 4.2.1. — *Soit $\Lambda_{2/3} \subset \mathrm{PL}(\Sigma)$ la partie convexe définie par $\lambda_j > 2/3$ pour tout j. Il existe une fonction*

$$c_f : \mathsf{T}(\Lambda_{2/3}) \times \mathscr{A}_G \to \mathbf{C}, \quad (\lambda, \chi) \mapsto c_f(\lambda, \chi),$$

holomorphe en λ telle que $\log |c_f|$ est bornée et telle que le produit des transformées de Fourier locales aux places non archimédiennes s'écrive, pour tout $\chi \in \mathscr{A}_G$ et tout $\lambda \in \mathsf{T}(\Lambda)$

$$\check{H}_f(-\lambda, \chi) = c_f(\lambda, \chi) \prod_j L(\lambda_j, \chi_j).$$

Démonstration. — Si χ est fixé, c'est la proposition 2.2.6 de [**2**]. Le fait que $\log |c_f|$ soit borné indépendamment de χ se déduit immédiatement de la preuve dans *loc. cit.* $\square$

Corollaire 4.2.2. — *La fonction $\check{H}_f$ se prolonge en une fonction méromorphe pour $\lambda \in \mathsf{T}(\Lambda_{2/3})$. Plus précisément, le produit $\prod_j (\lambda_j - 1) \check{H}_f(-\lambda, \chi)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathsf{T}(\Lambda_0)$ et*

$$\lim_{\lambda \to (1, \dots, 1)} \prod_j (\lambda_j - 1) \check{H}_f(-\lambda, \chi) = 0$$

si et seulement si $\chi \neq \mathbf{1}$.

Comme conséquence facile de l'estimation par Rademacher des valeurs des fonctions L de Hecke pour les caractères non ramifiés, estimation qui repose sur le principe de Phragmén–Lindelöf, on obtient la majoration suivante :

Corollaire 4.2.3. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < 1/3$ et un réel c_ε tels que si $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 1 - \delta$,*

$$\prod_j \frac{|\lambda_j - 1|}{|\lambda_j|} \check{H}_f(-\lambda, \chi) \leq c_\varepsilon \big(1 + \|\operatorname{Im}(\lambda)\|\big)^\varepsilon \big(1 + \|\chi\|\big)^\varepsilon.$$

Passons maintenant aux places archimédiennes. La proposition suivante précise la proposition 2.3.2 de [**2**].

PROPOSITION 4.2.4. — *Pour tout compact $K \subset \Lambda_{2/3} \subset \mathrm{PL}(\Sigma)_{\mathbf{R}}$, il existe un réel c_K telle que pour tout $\varphi \in \mathsf{T}(K)$ et tout $m \in M$, on ait la majoration*

$$|\mathscr{F}(m)| \leq c_K \frac{1}{1+\|m\|} \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{1+\|\varphi\|_\sigma}{\prod_{j \in J_\sigma} (1+|\langle e_j, m\rangle|)}.$$

COROLLAIRE 4.2.5. — *Désignons par $\widetilde{\Sigma}$ l'éventail $\prod_{v|\infty} \Sigma$ dans $\widetilde{N} = \prod_{v|\infty} N$. Si $\varphi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, désignons par $\widetilde{\varphi}$ la fonction $\widetilde{N} \to \mathbf{R}$ définie par $(n_v)_v \mapsto \sum \varphi(n_v)$. Pour tout compact K de $\mathrm{PL}(\Sigma)$ contenu dans $\Lambda_{2/3}$, il existe une constante c_K telle que pour tout $\varphi \in \mathsf{T}(K)$ et tout $\chi \in \mathscr{A}_G$ décomposé sous la forme $\chi = im + \chi_u \in iM \oplus \mathscr{U}_G$, on ait*

$$\check{H}_\infty(\varphi, \chi) \leq \frac{c_K}{1+\|\chi\|} \sum_{\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}} \frac{1+\|\mathrm{Im}\, \widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{\sigma}}}{\prod_{e \in \widetilde{\sigma}} (1+|\langle e, \mathrm{Im}\, \widetilde{\varphi}|_{\widetilde{\sigma}} + \widetilde{m}\rangle|)}.$$

Démonstration. — Si l'on note $\widetilde{m} = (m_v)_v$ la décomposition de χ à l'infini, on remarque que

$$\check{H}_\infty(\varphi, \chi) = \prod_{v|\infty} \check{H}_v(\varphi, \chi) = \prod_{v|\infty} \mathscr{F}(\varphi, m_v) = \mathscr{F}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{m}).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente. □

Preuve de la proposition 4.2.4. — Il faut estimer

$$\mathscr{F}(m) = \int_N \exp(-\varphi(v) - i\langle v, m\rangle)\, dv.$$

Soit $\sigma \in \Sigma$ un cône de base $(e_1, \dots, e_d)$. Si $|\det(e_j)|$ désigne la mesure du parallélotope de base les e_j, on a

$$\begin{aligned} \int_\sigma \exp(-\varphi(v) - i\langle v, m\rangle)\, dv &= \int_{\mathbf{R}_+^d} \prod_{j=1}^d \exp\big(-t_j(\varphi(e_j) + i\langle e_j, m\rangle)\big)\, |\det(e_j)| \prod dt_j \\ &= c(\sigma) \prod_{j=1}^d \frac{1}{\varphi(e_j) + i\langle e_j, m\rangle}. \qquad (4.2.6) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\mathscr{F}(m) = \sum_\sigma c(\sigma) \prod_{e \in \sigma} \frac{1}{\varphi(e) + i\langle e, m\rangle}. \qquad (4.2.7)$$

D'autre part, supposons que $m_j \neq 0$, on peut intégrer par parties et écrire

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(m) &= \int_N \frac{1}{im_j}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)\exp(-\varphi(v) - i\langle v, m\rangle)\,dv \\
-im_j\mathscr{F}(m) &= \int_N \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)\exp(-\varphi(v) - i\langle v, m\rangle)\,dv \\
&= \sum_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\bigg|_\sigma \int_\sigma \exp(-\varphi(v) - i\langle v, m\rangle)\,dv \\
&= \sum_\sigma c(\sigma)\,\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\bigg|_\sigma \prod_{e\in\sigma}\frac{1}{\varphi(e) + i\langle e, m\rangle}. \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

En combinant les égalités (4.2.7) et (4.2.8) pour tous les indices j tels que $m_j \neq 0$, on obtient une majoration

$$|\mathscr{F}(m)| \leq \frac{1}{1 + \|m\|}\sum_\sigma c(\sigma)\frac{1 + \|\varphi\|_\sigma}{\prod_{e\in\sigma}|\varphi(e) + i\langle e, m\rangle|}.$$

Finalement, comme $\varphi \in \mathsf{T}(K)$, on a une estimation

$$|\varphi(e) + i\langle e, m\rangle| \gg 1 + |\mathrm{Im}(\varphi)(e) + \langle e, m\rangle|$$

et la proposition s'en déduit. □

4.3. Définition d'une classe de contrôle

Soit β un réel strictement positif. Si M et V sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $M \subset V$, notons $\mathscr{D}_{\beta,\varepsilon}(M, V)$ le sous-monoïde de $\mathscr{F}(V, \mathbf{R}_+)$ engendré par les fonctions $h : V \to \mathbf{R}_+$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$, $\varepsilon \in \,]0;1[$ et une famille (ℓ_j) de formes linéaires sur V vérifiant :
- la famille $(\ell_j|_M)$ forme une base de M^* ;
- pour tout $v \in V$ et tout $m \in M$, on a

$$h(v + m) \leq c\frac{(1 + \|v\|)^\beta}{(1 + \|m\|)^{1-\varepsilon}}\frac{1}{\prod(1 + |\ell_j(v + m)|)}. \qquad (4.3.1)$$

Notons alors $\mathscr{D}_\beta = \bigcap_{\varepsilon>0}\mathscr{D}_{\beta,\varepsilon}$.

PROPOSITION 4.3.2. — *Les $\mathscr{D}_\beta(M, V)$ définissent une classe de contrôle au sens de la définition 3.1.1.*

La preuve de cette proposition consiste en une série d'inégalités faciles mais techniques. Nous la repoussons à l'appendice B.

4.4. La fonction zêta des hauteurs et la formule de Poisson

On s'intéresse fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{X}$ restreinte à l'ouvert dense formé par le tore G ; c'est par définition la série génératrice

$$Z(\lambda) = \sum_{x\in G(F)} H(-\lambda, x),$$

quand elle converge. Des théorèmes taubériens standard (voir l'appendice) permettront de déduire de résultats analytiques sur Z un développement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée

$$N(\lambda, H) = \#\{x \in G(F)\,;\, H(\lambda, x) \leq H\}.$$

LEMME 4.4.1. — *Lorsque* $\mathrm{Re}(\lambda)$ *décrit un compact de* Λ_1*, la fonction zêta des hauteurs converge uniformémént en* λ*. Plus généralement, la série*

$$\sum_{x \in G(F)} H(-\lambda, x\mathbf{g})$$

converge absolument uniformément lorsque $\mathrm{Re}(\lambda)$ *décrit un compact de* Λ_1 *et* $\mathbf{g}$ *un compact de* $G(\mathbf{A}_F)$*.*

Démonstration. — Compte tenu d'estimations pour $H(-\lambda, x\mathbf{g})/H(-\lambda, x)$ lorsque $\mathbf{g}$ décrit un compact de $G(\mathbf{A}_F)$, $x \in G(F)$ et $\lambda \in \mathsf{T}(\Lambda_1)$, c'est en fait un corollaire de l'intégrabilité de la fonction $H(-\lambda, \cdot)$ sur $G(\mathbf{A}_F)$. Voir [**4**], Th. 4.2 et aussi [**19**], Prop. 4.3. □

Par conséquent, on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson sur le tore adélique $G(\mathbf{A}_F)$ pour le sous-groupe discret $G(F)$. Compte tenu de l'invariance de l'accouplement de hauteurs par le sous-groupe compact maximal $\mathbf{K}_G$ de $G(\mathbf{A}_F)$, on en déduit la formule

$$Z(\lambda) = \int_{\mathscr{A}_G} \check{H}(-\lambda, \chi)\, d\chi \tag{4.4.2}$$

où $d\chi$ est la mesure de Haar sur le groupe $\mathscr{A}_G$ des caractères unitaires continus sur le groupe $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$ duale de la mesure de comptage sur $G(F)$.

Rappelons que l'on a décomposé le groupe $\mathscr{A}_G = M \oplus \mathscr{U}_G$, où $\mathscr{U}_G$ est un groupe discret. De plus, si $\chi = m \oplus \chi_u$,

$$\check{H}(-\lambda, \chi) = \check{H}(-\lambda - im, \chi_u)$$

si bien que

$$Z(\lambda) = \int_M \left(\sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \check{H}(-\lambda - im, \chi_u) \right) dm$$

où dm est la mesure de Lebesgue sur M telle que $dm\, d\chi_u = d\chi$, $d\chi_u$ étant la mesure de comptage sur $\mathscr{U}_G$.

LEMME 4.4.3. — *Si* d^0m *est la mesure de Lebesgue sur* M *définie par le réseau* M*, on a*

$$dm = \left(2\pi \operatorname{vol}(\mathbf{A}_F/F) \operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s)\right)^{-d} d^0m.$$

Démonstration. — Par multiplicativité, il suffit de traiter le cas $G = \mathbf{G}_m$ et $d = 1$. Notons $\mathbf{A}_F^1$ le sous-groupe de $\mathbf{A}_F^*$ formé des x tels que $\|x\| = 1$. La suite exacte

$$1 \to \mathbf{A}_F^1/F^* \to \mathbf{A}_F^*/F^* \xrightarrow{\log\|x\|} \mathbf{R} \to 0$$

permet de munir $\mathbf{A}_F^1/F^*$ de la mesure de Haar dx^1 telle que $d^*x = dx^1\, d^0n$. La suite exacte duale

$$1 \to \mathbf{R} \to (\mathbf{A}_F^*/F^*)^* \to (\mathbf{A}_F^1/F^*)^* \to 1$$

et la discrétude du groupe des caractères de $\mathbf{A}_F^1/F^*$ permet de munir $(\mathbf{A}_F^*/F^*)^*$ de le mesure $d^0m \sum$. Avec ces normalisations, la constante devant la formule de Poisson est $(2\pi \operatorname{vol}(\mathbf{A}_F^1/F^*))^{-1}$. Compte tenu des normalisations choisies, le théorème classique selon lequel $\tau(\mathbf{G}_m) = \tau(\mathbf{G}_a) = 1$, cf. par exemple [**20**], p. 116, devient

$$\operatorname{vol}(\mathbf{A}_F^1/F^*) = \operatorname{vol}(\mathbf{A}_F/F) \operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s),$$

d'où le lemme. □

Soit $\rho = (1, \ldots, 1) \in \mathrm{PL}(\Sigma)$. On décale la fonction zêta des hauteurs de ρ : si $\lambda \in \mathrm{PL}(\Sigma)^+$,

$$Z(\rho + \lambda) = \int_M \left(\sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \check{H}(-\lambda - \rho - im, \chi_u) \right) dm$$

Soit F la fonction $\mathrm{PL}(\Sigma)^+ \to \mathbf{C}$ définie par la série

$$\lambda \mapsto (\operatorname{vol}(\mathbf{A}_F/F) \operatorname{res}_{s=1} \zeta_F(s))^{-d} \sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \check{H}(-1 - \lambda, \chi_u),$$

de sorte que si $\lambda \in \mathrm{PL}(\Sigma)^+$,

$$Z(\lambda + \rho) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_M F(\lambda + im)\, d^0m. \tag{4.4.4}$$

Proposition 4.4.5. — *Si $\beta > 1$, la fonction F appartient à l'espace $\mathscr{H}_M(\mathrm{PL}(\Sigma)^+)$ défini par la classe de contrôle $\mathscr{D}_\beta$ du paragraphe 4.3.*

De plus, pour tout $\lambda \in \mathrm{PL}(\Sigma)^+$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{F(s\lambda)}{\mathsf{X}_{\mathrm{PL}(\Sigma)^+}(s\lambda)} = \tau(\mathscr{X}),$$

le nombre de Tamagawa de $\mathscr{X}$.

Démonstration. — On a vu que l'on pouvait écrire

$$\check{H}(-\rho - \lambda, \chi) = c_f(\lambda + \rho, \chi) \check{H}_\infty(-\rho\lambda, \chi) \prod_j L(\lambda_j + 1, \chi_j).$$

Par suite, la fonction

$$\lambda \mapsto \check{H}(-\rho - \lambda, \chi) \prod_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 1}$$

admet un prolongement holomorphe pour $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -1$.

De plus, il résulte des corollaires 4.2.3 et 4.2.5 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < 1/3$ tel que si pour tout j on a $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -\delta$, alors

$$\left| \check{H}(-\rho - \lambda, \chi) \prod_j \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 1} \right| \ll \frac{(1 + \|\operatorname{Im}(\lambda)\|)^{1+\varepsilon}}{(1 + \|\chi_\infty\|)^{1-\varepsilon}} \sum_{\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}(d)} \frac{1}{\prod_{e \in \tilde{\sigma}_1} (1 + |\langle e, \operatorname{Im}(\lambda)|_{\tilde{\sigma}} + \chi_\infty \rangle|)},$$

formule dans laquelle χ_∞ désigne l'image de χ par l'homomorphisme de noyau fini « type à l'infini » $\mathscr{A}_G \to M_\infty = \bigoplus_{v|\infty} M$. Ainsi, on obtient un prolongement holomorphe de la fonction $\Phi : \lambda \mapsto F(\lambda)\prod_j \lambda_j/(1+\lambda_j)$ pour $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -\delta$ si l'on prouve que pour tout $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}(d)$, la série

$$\sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \frac{1}{(1+\|\chi_{u,\infty}\|)^{1-\varepsilon}} \frac{1}{\prod_{e\in\widetilde{\sigma}_1}(1+|\langle e, \operatorname{Im}(\lambda)|_{\widetilde{\sigma}} + \chi_{u,\infty}\rangle|)}$$

converge localement uniformément en λ si $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -\delta$. Fixons $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}(d)$. Alors, lorsque $e \in \widetilde{\sigma}_1$, les formes linéaires $\langle e, \cdot\rangle$ forment une base de M_∞^*. Il est facile de remplacer la sommation sur le sous-groupe discret $\mathscr{U}_{G,\infty}$ par une intégrale sur l'espace vectoriel qu'il engendre, lequel est d'ailleurs un supplémentaire de M envoyé diagonalement dans M_∞. La convergence est alors une conséquence de la proposition B.3.

Pour obtenir l'assertion sur la croissance de F, il faut montrer que si $\beta > 1$, K est un compact de $\mathrm{PL}(\Sigma)^+$, $\lambda \in \mathsf{T}(K)$ et $m \in M$, on a une majoration

$$|\Phi(\lambda + im)| \ll \frac{(1+\|\operatorname{Im}(\lambda)\|)^\beta}{(1+\|m\|)^{1-\varepsilon}} \sum_\alpha \prod_k \frac{1}{1+|\ell_{\alpha,k}(\operatorname{Im}(\lambda)+m)|}$$

où α parcourt un ensemble fini et où pour tout α, $\{\ell_{\alpha,k}\}_k$ est une base de $\mathrm{PL}(\Sigma)^*$. Il nous faut récrire un peu différemment la majoration de $\check{H}$ obtenue ci-dessus en remarquant que si la forme des transformées de Fourier aux places finies fournit le prolongement méromorphe, la convergence de la série provient, elle, des estimations archimédiennes. On écrit ainsi

$$\check{H}(-\rho-\lambda-im,\chi_u) = c_f(\rho+\lambda+im,\chi_u)\prod_j L(\lambda_j+1+im,\chi_{u,j})\check{H}_\infty(-\rho-\lambda,\chi_m\chi_u)$$

et donc

$$\left|\check{H}(-\rho-\lambda-im,\chi_u)\prod_j \frac{\lambda_j+im}{1+\lambda_j+im}\right| \\ \ll \frac{(1+\|\operatorname{Im}(\lambda)+m\|)^\varepsilon(1+\|\chi_u\|)^\varepsilon}{1+\|m+\chi_{u,\infty}\|} \sum_{\widetilde{\sigma}\in\widetilde{\Sigma}(d)} \frac{1+\|\operatorname{Im}(\lambda)\|_{\widetilde{\sigma}}}{\prod_{e\in\widetilde{\sigma}_1}(1+|\langle e,\operatorname{Im}(\lambda)|_{\widetilde{\sigma}}+m+\chi_\infty\rangle|)}.$$

Par suite,

$$|\Phi(\lambda+im)| \leq \sum_{\widetilde{\sigma}\in\widetilde{\Sigma}(d)} (1+\|\operatorname{Im}(\lambda)\|_{\widetilde{\sigma}})(1+\|\operatorname{Im}(\lambda)+m\|)^\varepsilon G_{\widetilde{\sigma}}(\operatorname{Im}(\lambda),m)$$

où $\Phi_{\widetilde{\sigma}(\varphi,m)}$ est défini par la série

$$\Phi_{\widetilde{\sigma}}(\varphi,m) = \sum_{\chi_u\in\mathscr{U}_G} \frac{(1+\|\chi_u\|)^\varepsilon}{1+\|m+\chi_{u,\infty}\|} \prod_{e\in\widetilde{\sigma}_1} \frac{1}{1+|\langle e,\widetilde{\varphi}|_{\widetilde{\sigma}}+m+\chi_{u,\infty}\rangle|}.$$

On a la majoration

$$1+\|\chi_u\| \leq 1+\|m+\chi_{u,\infty}\|+\|m\| \leq (1+\|m+\chi_{u,\infty}\|)(1+\|m\|)$$

et comme précédemment, on remplace la sommation sur le sous-groupe discret $\mathscr{U}_G$ par l'intégrale sur l'espace vectoriel qu'il engendre. La proposition B.3 fournit alors pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$ une estimation

$$G_{\widetilde{\sigma}}(\varphi, m) \ll \frac{1}{(1+\|m\|)^{1-\varepsilon'}} \sum_{\alpha} \prod_{k} \frac{1}{1+|\ell_{\alpha,k}(m+\varphi|_{\widetilde{\sigma}})|}$$

où $\{\ell_{\alpha,k}\}_k$ est une base de M^* et $\varphi|_{\widetilde{\sigma}}$ l'élément de M qui coïncide avec $(\varphi,\dots,\varphi) \in \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{PL}(\Sigma)$ sur le cône $\widetilde{\sigma}$ de l'éventail $\widetilde{\Sigma}$. L'application $\varphi \mapsto \ell_{\alpha,k}(\varphi|_{\widetilde{\sigma}})$ est une forme linéaire $\ell_{\widetilde{\sigma},\alpha,k}$ sur $\mathrm{PL}(\Sigma)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}|G(\lambda+im)| &\ll \frac{(1+\|\mathrm{Im}(\lambda)\|)(1+\|\mathrm{Im}(\lambda)+m\|)^{\varepsilon}}{(1+\|m\|)^{1-\varepsilon-\varepsilon'}} \sum_{\widetilde{\sigma}} \sum_{\alpha} \prod_{k} \frac{1}{1+|\ell_{\widetilde{\sigma},\alpha,k}(\mathrm{Im}(\lambda)+m)|} \\ &\ll \frac{(1+\|\mathrm{Im}(\lambda)\|)^{1+\varepsilon}}{(1+\|m\|)^{1-2\varepsilon-\varepsilon'}} \sum_{\widetilde{\sigma}} \sum_{\alpha} \prod_{k} \frac{1}{1+|\ell_{\widetilde{\sigma},\alpha,k}(\mathrm{Im}(\lambda)+m)|}.\end{aligned}$$

Comme on peut prendre ε et ε' arbitrairement petits, la contrôlabilité est établie.

Il reste à calculer la limite quand $s \to 0$ par valeurs supérieures de $F(s\lambda)/\mathsf{X}_{\mathrm{PL}(\Sigma)^+}(s\lambda)$. Le cône $\mathrm{PL}(\Sigma)^+$ est simplicial et

$$\mathsf{X}_{\mathrm{PL}(\Sigma)^+}(\lambda) = \frac{1}{\prod_j \lambda_j}.$$

Ainsi,

$$\frac{F(\lambda)}{\mathsf{X}_{\mathrm{PL}(\Sigma)^+}(\lambda)} = (\mathrm{vol}(\mathbf{A}_F/F)\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^{-d} \prod_j \lambda_j \sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \check{H}(-\lambda-\rho, \chi_u).$$

D'après ce qui précède, la série qui définit F converge uniformément pour $\mathrm{Re}(\lambda_j) > -\delta$; cela permet de permuter sommation et limite, si bien que

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+} \frac{F(s\lambda)}{\mathsf{X}_{\mathrm{PL}(\Sigma)^+}(s\lambda)} \\ &\qquad = (\mathrm{vol}(\mathbf{A}_F/F)\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^{-d} \sum_{\chi_u \in \mathscr{U}_G} \left(\lim_{s\to 0^+} \check{H}(-s\lambda-\rho, \chi_u) \prod_j (s\lambda_j) \right).\end{aligned}$$

En écrivant,

$$\check{H}(-s\lambda-\rho, \chi) \prod_j (s\lambda_j) = c_f(s\lambda, \chi) \prod_j \big(s\lambda_j L(s\lambda_j+1, \chi_j)\big) \check{H}_\infty(s\lambda, \chi),$$

on voit que la limite est nulle si l'un des $\chi_j \neq \mathbf{1}$ (car une des fonctions $L(\cdot, \chi_j)$ n'a pas de pôle en 1, les autres ont au plus un pôle simple). Étudions maintenant le cas $\chi = \mathbf{1}$.

Utilisant la formule (4.1.6), il vient

$$\begin{aligned}
\check H(-s\lambda-\rho,\mathbf 1)\prod_j \zeta_F(1+\lambda_j s)^{-1}& \\
&= \prod_{v\nmid\infty}\zeta_v(1)^d\prod_j\zeta_v(1+\lambda_j s)^{-1}\int_{G(F_v)} H(-s\lambda-\rho,x)\mu'_{G,v}\\
&\qquad\times\prod_{v\mid\infty}\int_{G(F_v)} H(-s\lambda-\rho,x)\mu'_{G,v}\\
&= \prod_{v\nmid\infty}\zeta_v(1)^d\prod_j\zeta_v(1+\lambda_j s)^{-1}\int_{G(F_v)} H(-s\lambda)\mu'_{\mathscr X,v}\times\prod_{v\mid\infty}\int_{G(F_v)} H(-s\lambda)\mu'_{\mathscr X,v}.
\end{aligned}$$

C'est un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s)>-\varepsilon$, d'où un prolongement par continuité en $s=0$, de valeur

$$\begin{aligned}
\prod_{v\nmid\infty}\zeta_v(1)^{d-\#J}\mu'_{\mathscr X,v}(\mathscr X(F_v))\prod_{v\mid\infty}\mu'_{\mathscr X,v}(\mathscr X(F_v))& \\
&= \tau(\mathscr X)\mu(\mathbf A_F/F)^d(\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^{-\operatorname{rang}(\operatorname{Pic}\mathscr X_F)}
\end{aligned}$$

en vertu de la définition (4.1.7) de la mesure de Tamagawa de $\mathscr X(\mathbf A_F)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to0}\check H(-s\lambda-\rho,\mathbf 1)(\prod_j s\lambda_j) &= (\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^{\#J}\lim_{s\to0}\check H(-s\lambda-\rho,\mathbf 1)\prod_j\zeta_F(1+s\lambda_j)^{-1}\\
&= \tau(\mathscr X)\mu(\mathbf A_F/F)^d(\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^d.
\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to0}F(\lambda s)\mathsf X_{\mathrm{PL}^+(\Sigma)}(\lambda s)^{-1} &= (\operatorname{vol}(\mathbf A_F/F)\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^{-d}\mu(\mathbf A_F/F)^d(\operatorname{res}_{s=1}\zeta_F(s))^d\tau(\mathscr X)\\
&= \tau(\mathscr X),
\end{aligned}$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

L'équation (4.4.4) et le théorème 3.1.14 impliquent alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4.6. — *La fonction zêta des hauteurs (décalée)*

$$\lambda\mapsto Z(\rho+\lambda)$$

converge localement uniformément sur le tube $\mathsf T(\mathrm{PL}(\Sigma)^+)$ *et définit une fonction holomorphe sur* $\mathsf T(\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr X_F))$. *Si* $\beta>1$ *et si* $\mathscr D_\beta$ *désigne la classe de contrôle introduite au sous-paragraphe 4.3, elle appartient à l'espace* $\mathscr H_{\{0\}}(\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr X_F);\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr X_F))$ *(défini en 3.1.12) des fonctions méromorphes* $\{0\}$*-contrôlées dont les pôles sont simples et donnés par les faces du cône* $\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr X_F)$.

De plus, pour tout $\lambda\in\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr X_F)$,

$$\lim_{s\to0}\frac{Z(s\lambda+\rho)}{\mathsf X_{\Lambda^0_{\mathrm{eff}}}(s\lambda)}=\tau(\mathscr X).$$

En spécialisant la fonction zêta des hauteurs à la droite $\mathbf{C}\rho$ qui correspond au fibré en droite anticanonique, on obtient le corollaire :

Corollaire 4.4.7. — *Si $\beta > 1$, il existe $\varepsilon > 0$, une fonction f holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \geq 1 - \varepsilon$ telle que*

(i) $f(1) = \tau(\mathscr{X})$;

(ii) *Pour tout $\sigma \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$ et tout $\tau \in \mathbf{R}$, $|f(\sigma + i\tau)| \ll (1 + |\tau|)^{\beta}$;*

(iii) *Pour tout $\sigma > 1$ et tout $\tau \in \mathbf{R}$, $Z(s\omega) = \left(\frac{s}{s-1}\right)^r f(s)$.*

Corollaire 4.4.8. — *Si r désigne le rang de $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_F)$, il existe un polynôme unitaire P de degré $r-1$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $H > 0$,*

$$N(\omega_{\mathscr{X}}^{-1}; H) = \frac{\tau(\mathscr{X})}{(r-1)!} HP(\log H) + O(H^{1-\varepsilon}).$$

Lorsque $F = \mathbf{Q}$ et lorsque la variété torique $\mathscr{X}$ est projective et telle que $\omega_{\mathscr{X}}^{-1}$ est engendré par ses sections globales, ce corollaire avait été démontré précédemment par R. de la Bretèche. Sa méthode est différente ; elle est fondée sur le travail de P. Salberger [**18**] et une étude fine des sommes de fonctions arithmétiques en plusieurs variables (voir [**7, 6**] et [**8**] pour un cas particulier).

5. Application aux fibrations en variétés toriques

5.1. Holomorphie

Soit $\mathscr{B}$ un S-schéma projectif et plat. Soit $\mathscr{T} \to \mathscr{B}$ un G-torseur, et notons $\eta : X^*(G) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{B})$ l'homomorphisme de fonctorialité des torseurs. Fixons un relèvement $\widehat{\eta} : X^*(G) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})$ de cet homomorphisme (c'est-à-dire, un choix de métriques hermitiennes à l'infini sur les images d'une base de $X^*(G)$, prolongés par multiplicativité à l'image de η).

Donnons nous une S-variété torique lisse $\mathscr{X}$, compactification équivariante de G. Soit $\mathscr{Y}$ le S-schéma obtenu par les constructions du § 2.1.

On obtient alors un diagramme canonique, qui provient des propositions 2.1.11, 2.3.6, du théorème 2.2.4 et de l'oubli des métriques hermitiennes :

(5.1.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^*(G) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}_F) \oplus \mathrm{Pic}(\mathscr{B}_F) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_F) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^*(G) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \widehat{\mathrm{Pic}}^{G,\mathbf{K}}(\mathscr{X}) \oplus \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B}) \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{Y}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Le schéma $\mathscr{Y}$ contient $\mathscr{T}$ comme ouvert dense. On s'intéresse à la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$. Lorsque $\lambda \in \mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}_F)_{\mathbf{C}}$, notons $\widehat{\lambda}$ l'image de λ par l'homomorphisme (4.1.3). Si de plus $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})$, on notera enfin

$$Z(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}) = Z(\vartheta(\widehat{\lambda}) \otimes \pi^*\widehat{\alpha}; \mathscr{Y}) = \sum_{y \in \mathscr{T}(F)} H(\vartheta(\widehat{\lambda}) \otimes \pi^*\widehat{\alpha}; y)^{-1}.$$

Proposition 5.1.2. — *Soient $\widehat{\Lambda} \subset \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})_{\mathbf{R}}$ une partie convexe telle que $Z(\widehat{\alpha};\mathscr{B})$ converge normalement si la partie réelle de $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})_{\mathbf{C}}$ appartient à Λ.*

Alors, la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$ converge absolument pour tout $(\widehat{\lambda},\widehat{\alpha})$ tel que la partie réelle de $\lambda\otimes\omega_{\mathscr{X}}$ appartient à $\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{X}_F)$ et la partie réelle de α appartient à Λ. La convergence est de plus uniforme si la partie la partie réelle de $\lambda\otimes\omega_{\mathscr{X}}$ décrit un compact de $\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{X}_F)$.

Démonstration. — On peut décomposer la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$ en écrivant

$$Z(\widehat{\lambda},\widehat{\alpha}) = \sum_{b\in\mathscr{B}(F)} H(\widehat{\alpha};b)^{-1} Z(\vartheta(\widehat{\lambda});\mathscr{T}|_b). \tag{5.1.3}$$

D'après la remarque 2.4.6, le fibré inversible λ admet une section G-invariante s qui n'a ni pôles ni zéros sur l'ouvert $G\subset\mathscr{X}$. En utilisant cette section, on obtient, en vertu du théorème 2.4.8 et de la proposition 2.4.3 une égalité

$$Z(\vartheta(\widehat{\lambda});\mathscr{T}|_b) = \sum_{x\in G(F)} H(\widehat{\lambda},\mathsf{s};\mathbf{g}_b\cdot x)^{-1}, \tag{5.1.4}$$

où $\mathbf{g}_b\in G(\mathbf{A}_F)$ représente la classe du G-torseur arithmétique $\widehat{\mathscr{T}}|_b$. On rappelle que si $\mathbf{x}\in G(\mathbf{A}_F)$, on a une expression de la hauteur en produit de hauteurs locales

$$H(\widehat{\lambda},\mathsf{s},\mathbf{x}) = \prod_v \|\mathsf{s}\|_v\,(x_v)^{-1}.$$

On peut appliquer la formule sommatoire de Poisson sur le tore adélique $G(\mathbf{A}_F)$, d'où, en utilisant l'invariance des hauteurs locales par les sous-groupes compacts maximaux,

$$Z(\vartheta(\widehat{\lambda});\mathscr{T}|_b) = \int_{\mathscr{A}_G} \chi^{-1}(\mathbf{g}_b)\check{H}(-\widehat{\lambda};\chi)\,d\chi \tag{5.1.5}$$

où l'intégration est sur le groupe $\mathscr{A}_G$ des caractères (unitaires continus) du groupe localement compact $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/K_G$, muni de son unique mesure de Haar $d\chi$ qui permet cette formule.

L'utilisation de la formule de Poisson est justifiée par le fait que les deux membres convergent absolument. La série du membre de gauche est traitée dans [**4**], Theorem 4.2, lorsque $\mathbf{g}_b = 1$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de torsion. Comme il existe une constante $C(\lambda,\mathbf{g}_b)$ ne dépendant que de $\mathbf{g}_b$ et $\widehat{\lambda}$ telle que

$$\left|H(\widehat{\lambda},\mathsf{s};\mathbf{g}_b\cdot x)\right|^{-1} \leq C(\lambda,\mathbf{g}_b)\left|H(\widehat{\lambda},\mathsf{s};x)\right|^{-1}$$

et comme $H(\widehat{\lambda},\mathsf{s};x) = H(\widehat{\lambda};x)$, la convergence absolue du membre de gauche en résulte. (Voir aussi le lemme 4.4.1.) Quant à l'intégrale du membre de droite, on peut négliger le caractère χ dont la valeur absolue est 1 et on retrouve une intégrale dont la convergence absolue est prouvée dans [**4**] (preuve du théorème 4.4). Cela prouve aussi que lorsque $\mathrm{Re}(\lambda)$ décrit un compact de $\omega_{\mathscr{X}}^{-1}+\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{X}_F)$, la fonction zêta des hauteurs $Z(\vartheta(\widehat{\lambda});\mathscr{T}|_b)$ de la fibre en $b\in\mathscr{B}(F)$ est bornée indépendamment de b.

En reportant cette majoration dans la décomposition (5.1.3), il en résulte la convergence absolue de la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$ lorsque la partie réelle de $\widehat{\alpha}$

appartient à $\widehat{\Lambda}$ et $\lambda \otimes \omega_{\mathscr{X}}$ appartient à $\Lambda^0_{\text{eff}}(\mathscr{X}_F)$, uniformément lorsque $\lambda \otimes \omega_{\mathscr{X}}$ décrit un compact de ce cône. □

Dans [**9**], définition 1.4.1, on a défini la notion de fonction L d'Arakelov attachée à un torseur arithmétique et à une fonction sur un espace adélique. Appliquée au $G \times \mathbf{G}_m$-torseur arithmétique sur $\mathscr{B}$ défini par $\widehat{\mathscr{T}} \times_{\mathscr{B}} \widehat{\alpha}$ et à la fonction $\chi^{-1} \cdot \|\cdot\|$, la définition devient

$$L(\widehat{\mathscr{T}} \boxtimes \widehat{\alpha}, \chi^{-1} \boxtimes \|\cdot\|) = \sum_{b \in \mathscr{B}(F)} \chi^{-1}(\mathbf{g}_b) H(\widehat{\alpha}; b)^{-1}.$$

(On a utilisé le fait que $\mathbf{g}_b \in G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F)/K_G$ est la classe du G-torseur arithmétique $\mathscr{T}|_b$.)

Un corollaire de la démonstration de la proposition précédente est alors le suivant :

COROLLAIRE 5.1.6. — *Sous les hypothèses de la proposition 5.1.2, on a la formule*

$$Z(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}) = \int_{\mathscr{A}_G} \check{H}(-\widehat{\lambda}; \chi) L(\widehat{\mathscr{T}} \boxtimes \widehat{\alpha}, \chi^{-1} \boxtimes \|\cdot\|)\, d\chi.$$

Démonstration. — Compte tenu de la majoration établie à la fin de la preuve du théorème précédent et des rappels faits sur les fonctions L d'Arakelov, il suffit de reporter l'équation (5.1.5) dans la formule (5.1.3) et d'échanger les signes somme et intégrale. □

Cette dernière formule est le point de départ pour établir, moyennant des hypothèses supplémentaires sur $\mathscr{B}$, un prolongement méromorphe de la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$.

5.2. Prolongement méromorphe

Fixons une section de l'homomorphisme canonique $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathscr{B}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to \operatorname{Pic}(\mathscr{B}_F) \otimes \mathbf{Q}$, autrement dit un choix de fonctions hauteurs compatible au produit tensoriel, ce que Peyre appelle *système de hauteurs* dans [**17**], 2.2. Concernant $\mathscr{X}$, on utilise toujours les métriques adéliques canoniques utilisées au paragraphe 4. Ainsi, on écrira λ et α, les chapeaux devenant inutiles. L'application $\widehat{\eta} : X^*(G) \to \widehat{\operatorname{Pic}}(\mathscr{B})$ est supposée être la composée de l'application $\eta : X^*(G) \to \operatorname{Pic}(\mathscr{B}_F)$ donnée par la restriction du torseur à la fibre générique, et de la section $\operatorname{Pic}(\mathscr{B}_F) \otimes \mathbf{Q} \to \widehat{\operatorname{Pic}}(\mathscr{B}) \otimes \mathbf{Q}$ fixée.

Ces restrictions ne sont pas vraiment essentielles mais simplifient beaucoup les notations.

Notons $V_1 = \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)_{\mathbf{R}}$, $M_1 = X^*(G)_{\mathbf{R}}$, $n_1 = \dim V_1$ et $V_2 = \operatorname{Pic}(\mathscr{B}_F)_{\mathbf{R}}$. Soient $\Lambda_1 \subset V_1$ et $\Lambda_2 \subset V_2$ les cônes ouverts, intérieurs des cônes effectifs dans $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}_F)_{\mathbf{R}}$ et $\operatorname{Pic}(\mathscr{B}_F)_{\mathbf{R}}$. L'espace vectoriel V_1 possède une base naturelle, formée des fibrés en droites G-linéarisés associés aux diviseurs G-invariants sur $\mathscr{X} \otimes F$. Dans cette base, le cône Λ_1 est simplement l'ensemble des $(s_1, \dots, s_{n_1})$ strictement positifs.

On note $\eta : M_1 \to V_2$ l'application linéaire déduite de $\widehat{\eta}$ et $M = (\mathrm{id}, -\eta)(M_1) \subset V_1 \times V_2$. Notons $V = V_1 \times V_2$. Les théorèmes 2.2.4 et 2.2.9 identifient $\operatorname{Pic}(\mathscr{Y}_F)_{\mathbf{R}}$ à V/M, et l'intérieur du cône effectif de $\mathscr{Y}_F$ à l'image de $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ par la projection $V \to V/M$.

Si $\omega_{\mathscr{X}}$ est muni de sa G-linéarisation canonique, la proposition 2.1.8 dit que $\omega_{\mathscr{Y}}$ est l'image du couple $(\omega_{\mathscr{X}},\omega_{\mathscr{B}})$ par cette même projection.

LEMME 5.2.1. — *Avec ces notations, la formule du corollaire du paragraphe précédent peut se récrire :*

$$Z(\lambda+\omega_{\mathscr{X}}^{-1},\alpha+\omega_{\mathscr{B}}^{-1})=\int_{M_1} f(\lambda+im_1;\alpha-i\eta(m_1))\,dm_1,$$

où la fonction

$$f:\mathsf{T}(\Lambda_1\times\Lambda_2)\to\mathbf{C}$$

est définie par

$$f(\lambda;\alpha)=\int_{\mathscr{U}_G}\check{H}(-(\lambda+\omega_{\mathscr{X}}^{-1});\chi_u)L(\widehat{\mathscr{T}}\boxtimes(\alpha+\omega_{\mathscr{B}}^{-1});\chi_u^{-1}\boxtimes\|\cdot\|)\,d\chi_u$$

et dm_1, $d\chi_u$ sont des mesures de Haar sur M_1 et $\mathscr{U}_G$ telles que $d\chi=dm_1\,d\chi_u$ dans la décomposition $\mathscr{A}_G=M_1\oplus\mathscr{U}_G$ du paragraphe 4.1.1 (cf. aussi le lemme 4.4.3).

On note que $\mathscr{U}_G$ est un groupe discret et que la mesure $d\chi_u$ est donc proportionnelle à la mesure de comptage.

Démonstration. — Si $\chi\in\mathscr{A}_G$ s'écrit (m_1,χ_u) dans $M_1\oplus\mathscr{U}_G$, on remarque que l'on a les égalités

$$\check{H}(-\lambda;\chi)=\check{H}(-\lambda-\iota(i\,m_1);\chi_u)$$

et

$$\chi^{-1}(\mathbf{g}_b)H(\widehat{\alpha};b)^{-1}=\chi_u^{-1}(\mathbf{g}_b)H(\widehat{\alpha}-\eta(m_1);b)^{-1}$$

car (lemme 4.1.4)

$$\chi_{m_1}(\mathbf{g}_b)=\exp(i\,\|\cdot\|)([m_1]_*\widehat{\mathscr{T}}|_b)=\exp(i\,\|\widehat{\eta}(m_1)|_b\|)=H(-\widehat{\eta}(m_1);b).$$

On utilise ensuite le théorème de Fubini. □

On utilise enfin les notations du § 3.

HYPOTHÈSES 5.2.2. — *On fait les hypothèses suivantes :*

- *le cône Λ_2 est un cône polyédral (de type fini). Notons (ℓ_j) les formes linéaires définissant ses faces ;*
- *la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{B}$ converge localement normalement pour $\alpha+\omega_{\mathscr{B}}\in\Lambda_2$;*
- *il existe un voisinage convexe B_2 de l'origine dans V_2 et pour tout caractère $\chi\in\mathscr{A}_G$ une fonction holomorphe $g(\chi;\cdot)$ sur le tube $\mathsf{T}(B_2)$ tels que, si $\operatorname{Re}(\alpha+\omega_{\mathscr{B}})\in\Lambda_2$,*

$$L(\widehat{\mathscr{T}}\boxtimes\alpha,\chi^{-1}\boxtimes\|\cdot\|)=\prod_j\frac{\ell_j(\alpha)}{\ell_j(\alpha+\omega_{\mathscr{B}})}g(\chi;\alpha+\omega_{\mathscr{B}});$$

– *il existe un réel* γ *strictement positif tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *les fonctions* $g(\chi;\cdot)$ *vérifient une majoration uniforme*

$$|g(\chi;\alpha+\omega_{\mathscr{B}})| \leq C_\varepsilon\big(1+\|\mathrm{Im}(\alpha)\|\big)^\gamma\big(1+\|\chi\|\big)^\varepsilon,$$

pour un réel $\varepsilon < 1$ *et une constante* C_ε *;*

– *si* $\tau(\mathscr{B})$ *désigne le nombre de Tamagawa de* $\mathscr{B}$, *pour tout* α *appartenant à* Λ_2,

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{Z(\mathscr{B};s\alpha+\omega_{\mathscr{B}}^{-1})}{\mathsf{X}_{\Lambda_2}(s\alpha)} = \tau(\mathscr{B}) \neq 0.$$

Remarque 5.2.3. — Dans le cas où $\mathscr{B}$ est une variété de drapeaux généralisée, ces hypothèses correspondent à des énoncés sur les séries d'Eisenstein tordues par des caractères de Hecke. Ils sont établis dans [**19**].

Dans la suite, on travaille avec les classes de contrôle $\mathscr{D}_\beta$ introduites au paragraphe 4.3.

LEMME 5.2.4. — *Sous les hypothèses précédentes, pour tout réel* $\beta > 1$, *la fonction* f *appartient à* $\mathscr{H}_M(\Lambda_1\times\Lambda_2)$, *pour la classe* $\mathscr{D}_{\beta+\gamma}$.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 4.4.5, d'y insérer les majorations que nous avons supposées et de majorer

$$(1+\|\mathrm{Im}\,\lambda\|)^\beta(1+\|\mathrm{Im}\,\alpha\|)^\gamma \leq (1+\|\mathrm{Im}\,\lambda\|+\|\mathrm{Im}\,\alpha\|)^{\beta+\gamma}.$$

□

Grâce au théorème d'analyse 3.1.14, on en déduit un prolongement méromorphe pour la fonction zêta des hauteurs de $\mathscr{T}$.

THÉORÈME 5.2.5. — *La fonction zêta des hauteurs décalée de* $\mathscr{T}$ *admet un prolongement méromorphe dans un voisinage de* $\mathsf{T}(\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{Y}))$ *dans* $\mathrm{Pic}(\mathscr{Y})_{\mathbf{C}}$. *Cette fonction a des pôles simples donnés par les équations des faces de* $\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{Y})$. *De plus, si* $\lambda\in\Lambda^0_{\mathrm{eff}}(\mathscr{Y})$,

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{Z(\mathscr{T};s\lambda+\omega_{\mathscr{Y}}^{-1})}{\mathsf{X}_{\Lambda_{\mathrm{eff}}(\mathscr{Y})}(s\lambda)} = \tau(\mathscr{Y}),$$

le nombre de Tamagawa de $\mathscr{Y}$.

Démonstration. — Le seul point qui n'a pas été rappelé est que le nombre de Tamagawa est $\mathscr{Y}$ est le produit de ceux de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{B}$ ([**9**], théorème 2.5.5). □

COROLLAIRE 5.2.6. — *Il existe* $\varepsilon > 0$ *et un polynôme* P *tels que le nombre de points de* $\mathscr{T}(F)$ *dont la hauteur anticanonique est inférieure ou égale à* H *vérifie un développement asymptotique*

$$N(H) = HP(\log H) + O(H^{1-\varepsilon})$$

lorsque H *tend vers* $+\infty$. *Le degré de* P *est égal au rang de* $\mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_F)$ *moins* 1 *et son coefficient dominant vaut*

$$\mathsf{X}_{\Lambda_{\mathrm{eff}}(\mathscr{Y})}(\omega_{\mathscr{Y}}^{-1})\tau(\mathscr{Y}).$$

Appendice A
Un théorème taubérien

Le but de ce paragraphe est de démontrer un théorème taubérien dont la preuve nous a été communiquée par P. Etingof. Ce théorème est certainement bien connu des experts mais que nous n'avons pu le trouver sous cette forme dans la littérature.

THÉORÈME A.1. — *Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs et f la série de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{\lambda_n^s}.$$

On fait les hypothèses suivantes :
- *la série définissant f converge dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > a > 0$;*
- *elle admet un prolongement méromorphe dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > a - \delta_0 > 0$;*
- *dans ce domaine, elle possède un unique pôle en $s = a$, de multiplicité $b \in \mathbf{N}$. On note $\Theta = \lim_{s\to a} f(s)(s-a)^b > 0$;*
- *enfin, il existe un réel $\kappa > 0$ de sorte que l'on ait pour $\mathrm{Re}(s) > a - \delta_0$ l'estimation,*

$$\left| f(s)\frac{(s-a)^b}{s^b} \right| = O\big((1+\mathrm{Im}(s))^\kappa\big).$$

Alors il existe un polynôme unitaire P de degré $b-1$ tel que pour tout $\delta < \delta_0$, on ait, lorsque X tend vers $+\infty$,

$$N(X) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n \leq X} c_n = \frac{\Theta}{a\,(b-1)!} X^a P(\log X) + O(X^{a-\delta}).$$

On introduit pour tout entier $k \geq 0$ la fonction

$$\varphi_k(X) = \sum_{\lambda_n \leq X} a_n \left(\log(X/\lambda_n)\right)^k,$$

de sorte que $\varphi_0 = N$.

LEMME A.2. — *Sous les hypothèses du théorème A.1, il existe pour tout entier $k > \kappa$ un polynôme Q de degré $b-1$ et de coefficient dominant $k!\Theta/(a^{k+1}(b-1)!)$ tel que pour tout $\delta < \delta_0$, on ait l'estimation, lorsque X tend vers $+\infty$,*

$$\varphi_k(X) = X^a Q(\log X) + O(X^{a-\delta}).$$

Démonstration. — Soit $a' > a$ arbitraire. On remarque, en vertu de l'intégrale classique

$$\int_{a'+i\mathbf{R}} \lambda^s \frac{ds}{s^{k+1}} = \frac{2i\pi}{k!} \left(\log^+(\lambda)\right)^k, \quad \lambda > 0$$

que l'on a la formule

$$\varphi(X) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{a'+i\mathbf{R}} f(s) X^s \frac{ds}{s^{k+1}},$$

l'intégrale étant absolument convergente puisque $\kappa < k$.

On veut décaler le coutour d'intégration vers la droite verticale $\mathrm{Re}(s) = a - \delta$, où δ est un réel arbitraire tel que $0 < \delta < \delta_0$. Dans le rectangle $a - \delta \leq \mathrm{Re}(s) \leq a'$, $|\mathrm{Im}(s)| \leq T$, il y a un unique pôle en $s=a$. Le résidu y vaut

$$\operatorname{Res}_{s=a} f(s)\frac{X^s}{s^{k+1}} = \frac{\Theta}{a^{k+1}\,(b-1)!}X^a Q(\log X)$$

où Q est un polynôme unitaire de degré $b-1$. Il en résulte que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a'-iT}^{a'+iT} f(s)X^s\frac{ds}{s^{k+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\delta-iT}^{a-\delta+iT} f(s)X^s\frac{ds}{s^{k+1}} + I_+ - I_- + \frac{\Theta}{a^{k+1}\,(b-1)!}X^a Q(\log X),$$

où I_+ et I_- sont les intégrales sur les segments horizontaux (orientés de la gauche vers la droite). Lorsque T tend vers $+\infty$, ces intégrales sont $O(T^{\kappa-k-1}X^{a'})$ et tendent donc vers 0. Les hypothèses sur f et le fait que $k>\kappa$ montrent que $f(s)X^s/s^{k+1}$ est absolument intégrable sur la droite $\operatorname{Re}(s)=a-\delta$, l'intégrale étant majorée par $O(X^{a-\delta})$. Par conséquent, on a

$$\varphi(X) = \Theta\frac{k!}{a^{k+1}\,(b-1)!}X^a Q(\log X) + O(X^{a-\delta}).$$

Le lemme est ainsi démontré. □

Preuve du théorème. — On va démontrer par récurrence descendante que la conclusion du lemme précédent vaut en fait pour tout entier $k\geq 0$. Arrivés à $k=0$, le théorème sera prouvé. Montrons donc comment passer de $k\geq 1$ à $k-1$.

Pour tout $\eta\in\,]0;1[$, on a facilement l'inégalité

$$\frac{\varphi_k(X(1-\eta))-\varphi_k(X)}{\log(1-\eta)} \leq k\varphi_{k-1}(X) \leq \frac{\varphi_k(X(1+\eta))-\varphi_k(X)}{\log(1+\eta)}.$$

Fixons un réel δ' tel que $0<\delta'<\delta<\delta_0$. D'après le lemme précédent, il existe un réel C tel que

$$\left|\varphi_k(X) - \frac{k!\Theta}{a^{k+1}\,(b-1)!}X^a Q(\log X)\right| \leq CX^{a-\delta'}.$$

On constate que l'on a alors, si $-1<u<1$,

$$\frac{\varphi_k(X(1+u))-\varphi_k(X)}{\log(1+u)} = \frac{k!\Theta}{a^{k+1}\,(b-1)!}X^a\frac{Q(\log X+\log(1+u))(1+u)^a - Q(\log X)}{\log(1+u)} + R(X),$$

où

$$|R(X)| \leq 2CX^{a-\delta'}/\left|\log(1+u)\right| = O(X^{a-\delta'}/u)$$

si u tend vers 0 et $X\to+\infty$. Toujours lorsque $X\to+\infty$ et $u\to 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{Q(\log X+\log(1+u))(1+u)^a - Q(\log X)}{\log(1+u)} &= Q(\log X)\frac{(1+u)^a-1}{\log(1+u)} + \sum_{n=1}^{b-1}\frac{1}{n!}Q^{(n)}(\log X)\log(1+u)^{n-1}(1+u)^a \\ &= Q(\log X)\,(a+O(u)) + Q'(\log X)\,(1+O(u)) + O((\log X)^{b-1}u) \\ &= (aQ+Q')(\log X) + O((\log X)^{b-1}u).\end{aligned}$$

Prenons $u = \pm 1/X^\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est choisi de sorte que $\delta' + \varepsilon < \delta$. Alors, lorsque $X \to +\infty$, $|R(X)| = O(X^{a-\delta})$ et

$$\frac{Q(\log X + \log(1+u))(1+u)^a - Q(\log X)}{\log(1+u)} = (aQ + Q')(\log X) + O(X^{-\delta}).$$

On a alors un développement

$$\varphi_{k-1}(X) = \frac{1}{k} X^a (aQ + Q')(\log X) + O(X^{a-\delta})$$

Le coefficient dominant de $(aQ+Q')/k$ est égal à $(k-1)!\Theta/(a^k(b-1)!)$ d'où le théorème par récurrence descendante. □

Appendice B
Démonstration de quelques inégalités

Le but de cet appendice est de démontrer les inégalités sous-jacentes à la proposition 4.3.2 qui affirmait l'existence d'une classe de contrôle.

Rappelons les notations.

Soit β un réel strictement positif. Si M et V sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $M \subset V$, notons $\mathscr{D}_{\beta,\varepsilon}(M,V)$ le sous-monoïde de $\mathscr{F}(V, \mathbf{R}_+)$ engendré par les fonctions $h : V \to \mathbf{R}_+$ telles qu'il existe $c > 0$ et une famille (ℓ_j) de formes linéaires sur V vérifiant :

- la famille $(\ell_j|_M)$ forme une base de M^* ;
- pour tout $v \in V$ et tout $m \in M$, on a

$$h(v+m) \leq c \frac{(1+\|v\|)^\beta}{(1+\|m\|)^{1-\varepsilon}} \frac{1}{\prod(1+|\ell_j(v+m)|)}. \tag{B.1}$$

On définit ensuite $\mathscr{D}_\beta(M,V) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{D}_{\beta,\varepsilon}(M,V)$.

Théorème B.2. — *Les $\mathscr{D}_\beta(M,V)$ définissent une classe de contrôle au sens de la définition 3.1.1.*

Démonstration. — Les points (3.1.1,a) et (3.1.1,c) sont clairs. L'axiome (3.1.1,e) est vrai car la famille $(\ell_j \circ p|_M)$ contient une base de $(M/M_1)^*$. L'axiome (3.1.1,b) résulte de l'inégalité

$$\min_{|t|\leq 1}(1 + |\ell(v+tu+m)|) \geq \frac{1}{1+|\ell(u)|}(1+|\ell(v+m)|$$

valable pour tous $v \in V$, $u \in V$ et $m \in M$. Enfin, l'axiome (3.1.1,d), le plus délicat, fait l'objet de la proposition suivante. □

Proposition B.3. — *Soient $M \subset V$, V' un supplémentaire de M dans V, dm une mesure de Lebesgue sur M, (ℓ_j) une base de V^*. Pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$, il existe une constante $c_{\varepsilon'}$ et un ensemble $((\ell_{j,\alpha})_j)_\alpha$ de bases de $(V')^*$ tels que pour tous v_1 et $v_2 \in M'$,*

$$\int_M \frac{1}{(1+\|v_1+m\|)^{1-\varepsilon}} \frac{dm}{\prod(1+|\ell_j(v_2+m)|)} \leq \frac{c_{\varepsilon'}}{(1+\|v_1\|)^{1-\varepsilon'}} \sum_\alpha \frac{1}{\prod_j(1+|\ell_{j,\alpha}(v_2)|)}.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $\dim M$. Soient $\mathbf{u} \in M$, $M' \subset M$ tels que $M = M' \oplus \mathbf{R}\mathbf{u}$ et fixons une mesure de Lebesgue dm' sur M' telle que $dm' \cdot dt = dm$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}\mathbf{u}} \cdots &\ll \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1+\|v_1+m'\|+|t|)^{1-\varepsilon}} \frac{dt}{\prod_j (1+|\ell_j(v_2+m')t\ell_j(\mathbf{u})|)}\, dt \\
&\ll \prod_{j\,;\,\ell_j(\mathbf{u})=0} \frac{1}{1+|\ell_j(v_2+m')|} \times \\
&\qquad \times \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1+\|v_1+m'\|+|t|)^{1-\varepsilon}} \prod_{j\,;\,\ell_j(\mathbf{u})\neq 0} \frac{1}{1+|\ell_j(v_2+m')+t|}\, dt
\end{aligned}
$$

et, en appliquant le lemme B.4 ci-dessous,

$$
\begin{aligned}
&\ll \frac{1+\log(1+\|v_1+m'\|)}{(1+\|v_1+m'\|)^{1-\varepsilon}} \sum_\alpha \prod_j \frac{1}{1+|\ell_{j,\alpha}(v_2+m')|} \\
&\ll_{\varepsilon'} \frac{1}{(1+\|v_1+m'\|)^{1-\varepsilon'}} \sum_\alpha \frac{1}{\prod_j (1+|\ell_{j,\alpha}(v_2)|)}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lemme B.4. — *On a une majoration, valable pour tous réels $t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et tout $A \geq 0$,*

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|t-t_j|}\, dt \ll \frac{1+\log(1+A)}{(1+A)^{1-\varepsilon}} \sum_\alpha \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1+|\tau_{\alpha,j}|}
$$

où pour tout α et tout j, $\tau_{\alpha,j} = t_{a(\alpha,j)} - t_{b(\alpha,j)}$ de sorte que pour tout α, notant $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, les familles $(e_{\alpha,j} = e_{a(\alpha,j)} - e_{b(\alpha,j)})_j$ sont libres.

Démonstration. — On découpe l'intégrale en $\int_{-\infty}^{t_1}$, $\int_{t_1}^{t_2}$, …, $\int_{t_n}^{\infty}$ et on majore chaque terme.

Pour l'intégrale de $-\infty$ à t_1, on a

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t_1} \cdots &\leq \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{1+|t_j-t_1|} \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}} \frac{dt}{1+t_1-t} \\
&\leq \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{1+|t_j-t_1|} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+A+|t-t_1|)^{1-\varepsilon}} \frac{dt}{1+t} \\
&\leq \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{1+|t_j-t_1|} \frac{1+\log(1+A)}{(1+A)^{1-\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

d'après le lemme B.5. La dernière intégrale (de t_n à $+\infty$) se traite de même. Enfin,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} \cdots &\leq \prod_{j<k} \frac{1}{1+|t_k-t_j|} \prod_{j>k+1} \frac{1}{1+|t_{k+1}-t_j|} \times \\
&\qquad \times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}} \frac{dt}{(1+t-t_k)(1+t_{k+1}-t)}
\end{aligned}
$$

et cette dernière intégrale s'estime comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}}\frac{dt}{(1+t-t_k)(1+t_{k+1}-t)} = \\
&\qquad = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}}\frac{1}{2+t_{k+1}-t_k}\left(\frac{1}{1+t-t_k}+\frac{1}{1+t_{k+1}-t}\right) dt \\
&\qquad \leq \frac{1}{2+t_{k+1}-t_k}\Big(\int_{t_k}^{\infty}\frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}}\frac{dt}{1+t-t_k} \\
&\qquad\qquad + \int_{-\infty}^{t_{k+1}}\frac{1}{(1+A+|t|)^{1-\varepsilon}}\frac{dt}{1+t_{k+1}-t}\Big) \\
&\qquad \leq \frac{1}{2+t_{k+1}-t_k}\Big(\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(1+A+|t+t_k|)^{1-\varepsilon}}\frac{dt}{1+t} \\
&\qquad\qquad + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{(1+A+|t-t_{k+1}|)^{1-\varepsilon}}\frac{dt}{1+t}\Big) \\
&\qquad \ll \frac{1}{1+t_{k+1}-t_k}\frac{1+\log(1+A)}{(1+A)^{1-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

en vertu du lemme B.5. □

Lemme B.5. — *On a une majoration, valable pour tout $A\geq 1$ et tout $a>0$,*

$$\int_0^\infty \frac{1}{(A+|t+a|)^\alpha}\frac{dt}{1+t} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha}.$$

Il reste à démontrer ce lemme. Pour cela, on a besoin de deux lemmes supplémentaires !

Lemme B.6. — *Pour tous A et $B\geq 1$ et tous $\alpha,\beta>0$ tels que $\alpha+\beta>1$,*

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(A+t)^\alpha(B+t)^\beta} \ll_{\alpha,\beta} \frac{\min(A,B)}{A^\alpha B^\beta} \times \begin{cases} 1+\log(B/A) & \text{si } \alpha=1 \text{ et } B>A\,; \\ 1+\log(A/B) & \text{si } \beta=1 \text{ et } A>B\,; \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — On ne traite que le cas $A<B$, l'autre étant symétrique et le cas $A=B$ élémentaire. Faisons le changement de variables $A+T=(B-A)e^u$, d'où $B+T=(B-A)(1+e^u)$. Pour $t=0$, $u=\log A/(B-A)$. Lorsque $t\to+\infty$, $u\to+\infty$. Ainsi, l'intégrale vaut

$$I(A,B;\alpha,\beta)=\frac{1}{(B-A)^{\alpha+\beta-1}}\int_{\log A/(B-A)}^\infty \frac{e^{(1-\alpha)u}}{(1+e^u)^\beta}du.$$

Si $A<B\leq 2A$, on majore l'intégrale par

$$\begin{aligned}
I(A,B;\alpha,\beta) &\leq \frac{1}{(B-A)^{\alpha+\beta-1}}\int_{\log A/(B-A)}^\infty e^{(1-\alpha-\beta)u}\,du \\
&\leq \frac{1}{(B-A)^{\alpha+\beta-1}}\frac{1}{1-\alpha-\beta}\Big(\frac{B-A}{A}\Big)^{\alpha+\beta-1} \\
&\ll \frac{1}{A^{\alpha+\beta-1}} \ll \frac{A}{A^\alpha B^\beta}
\end{aligned}$$

puisque $1/A\leq 2/B$.

Lorsque $B \geq 2A$, $\log A/(B-A) \leq 0$. On minore $1+e^u$ par 1 lorsque $u \leq 0$ et par e^u lorsque $u \geq 0$, d'où les inégalités

$$\begin{aligned}(B-A)^{\alpha+\beta-1} I(A,B;\alpha,\beta) &= \int_{\log A/(B-A)}^{0} + \int_0^\infty \\ &\leq \int_0^\infty \frac{e^{(1-\alpha)u}}{(1+e^u)^\beta}\,du + \int_{\log A/(B-A)}^{0} e^{(1-\alpha)u}\,du \\ &\ll 1 + \begin{cases} \log(B-A)/A & \text{si } \alpha = 1\,; \\ \frac{1}{1-\alpha}\Big(1-\big(\frac{B-A}{A}\big)^{\alpha-1}\Big) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases} \\ &\ll \begin{cases} 1+\log(B/A) & \text{si } \alpha = 1\,; \\ 1+\big(\frac{B-A}{A}\big)^{\alpha-1} & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{1}{B-A} \leq \dfrac{2}{B} \leq \dfrac{1}{A}$, si bien que

$$\begin{aligned}I(A,B;\alpha,\beta) &\ll \frac{1}{(B-A)^{\alpha+\beta-1}} \times \begin{cases} 1+\log(B/A) \\ 1+((B-A)/A)^{\alpha-1} \end{cases} \\ &\ll \begin{cases} (1+\log(B/A))/A^{\alpha-1}B^\beta & \text{si } \alpha = 1\,; \\ 1/A^{\alpha-1}B^\beta & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré. □

LEMME B.7. — *Si $A, B \geq 1$, $\alpha \leq 1$, on a*

$$\int_0^{B-1} \frac{du}{(A+u)^\alpha (B-u)} \ll_\alpha \frac{1+\log A}{A^\alpha}.$$

Démonstration. — On fait le changement de variables $A+u = (A+B)(1-t)$, soit $B-u = (A+B)t$. Ainsi, l'intégrale vaut

$$J(A,B;\alpha) = \frac{1}{(A+B)^\alpha} \int_{1/(A+B)}^{B/(A+B)} \frac{du}{(1-u)^\alpha u}.$$

Si $A \geq B$, $u \leq B/(A+B) \leq 1/2$, donc $1-u \geq 1/2$ et l'intégrale vérifie

$$J(A,B;\alpha) \ll \frac{1}{(A+B)^\alpha} \int_{1/(A+B)}^{B/(A+B)} \frac{du}{u} = \frac{\log B}{(A+B)^\alpha} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha}.$$

Si $A \leq B$, on découpe l'intégrale de $1/(A+B)$ à $1/2$ et de $1/2$ à $B/(A+B)$.

$$\int_{1/(A+B)}^{1/2} \frac{du}{(1-u)^\alpha u} \leq \int_{1/(A+B)}^{1/2} \frac{du}{u} = \log \frac{A+B}{2}$$

$$\int_{1/2}^{B/(A+B)} \frac{du}{(1-u)^\alpha u} \leq \begin{cases} \int_{1/2}^{1}(\dots) & \text{si } \alpha < 1\,; \\ \log \frac{A+B}{2A} \leq \log \frac{A+B}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Finalement,

$$J(A,B;\alpha) \ll \frac{1+\log(A+B)}{(A+B)^\alpha} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha},$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

Preuve du lemme B.5. — Si $a > 0$, l'intégrale se majore par

$$\int_0^\infty \frac{1}{(A+t)^\alpha}\frac{dt}{1+t} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha}$$

d'après le lemme B.6. Si $a < 0$, on découpe l'intégrale de 0 à $-a$ et de $-a$ à $+\infty$. L'intégrale de 0 à $-a$ vaut

$$\int_0^{-a} \frac{1}{(A-t-a)^\alpha}\frac{dt}{1+t} = \int_0^{-a} \frac{1}{(A+u)^\alpha}\frac{dy}{(1-a)-u} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha}$$

en vertu du lemme B.7, tandis que l'intégrale de $-a$ à $+\infty$ s'estime ainsi :

$$\int_{-a}^\infty \frac{1}{(A+t+a))^\alpha}\frac{dt}{1+t} = \int_0^\infty \frac{1}{(A+u)^\alpha}\frac{du}{1-a+u} \ll \frac{1+\log A}{A^\alpha}$$

en appliquant de nouveau le lemme B.6 et en distinguant suivant que $A \leq 1-a$ ou $A \geq 1-a$. □

Références

[1] V. V. Batyrev & Yu. I. Manin – « Sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques », *Math. Ann.* **286** (1990), p. 27–43.

[2] V. V. Batyrev & Yu. Tschinkel – « Rational points on bounded height on compactifications of anisotropic tori », *Internat. Math. Res. Notices* **12** (1995), p. 591–635.

[3] ______, « Height zeta functions of toric varieties », *Journal Math. Sciences* **82** (1996), no. 1, p. 3220–3239.

[4] ______, « Manin's conjecture for toric varieties », *J. Algebraic Geometry* **7** (1998), no. 1, p. 15–53.

[5] ______, « Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties », in *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* **[16]**, p. 299–340.

[6] R. de la Bretèche – « Compter des points d'une variété torique rationnelle », Prépublication 41, Université Paris Sud (Orsay), 1998.

[7] ______, « Estimations de sommes multiples de fonctions arithmétiques », Prépublication 42, Université Paris Sud (Orsay), 1998.

[8] ______, « Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière », in *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* **[16]**, p. 51–77.

[9] A. Chambert-Loir & Yu. Tschinkel – « Torseurs arithmétiques et espaces fibrés », E-print, math.NT/9901006, 1999.

[10] ______, « Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, III », Work in preparation, 2000.

[11] J. Franke, Yu. I. Manin & Yu. Tschinkel – « Rational points of bounded height on Fano varieties », *Invent. Math.* **95** (1989), no. 2, p. 421–435.

[12] W. Fulton – *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies, no. 131, Princeton Univ. Press, 1993.

[13] R. Narasimhan – *Several complex variables*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995, Reprint of the 1971 original.

[14] T. Oda – *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergeb., no. 15, Springer Verlag, 1988.

[15] E. Peyre – « Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano », *Duke Math. J.* **79** (1995), p. 101–218.

[16] ______ (éd.) – *Nombre et répartition des points de hauteur bornée*, Astérisque, no. 251, 1998.

[17] ______, « Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels », in *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* **[16]**, p. 259–298.

[18] P. Salberger – « Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties », in *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* **[16]**, p. 91–258.

[19] M. Strauch & Yu. Tschinkel – « Height zeta functions of toric bundles over flag varieties », *Selecta Math. (N.S.)* **5** (1999), no. 3, p. 325–396.

[20] A. Weil – *Adeles and algebraic groups*, Progr. Math., no. 23, Birkhäuser, 1982.

Version du 4 décembre 2000, 16:35

Antoine Chambert-Loir, Institut de mathématiques de Jussieu, Boite 247, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 • *E-mail :* chambert@math.jussieu.fr

Yuri Tschinkel, Department of Mathematics, U.I.C., Chicago (IL) 60607
E-mail : yuri@math.uic.edu