Une construction de courbes k-rationnelles sur les surfaces de Kummer d'un produit de courbes de genre 1.

Ph. Satgé

Résumé. *k étant un corps de caractéristique différente de 2, nous décrivons une méthode permettant de construire des courbes k-rationnelles (i.e. k-birationnellement équivalentes à la droite projective) sur les surfaces de Kummer associées à un produit de courbes de genre 1 munies d'involutions k-hyperelliptiques. Nous ramenons ce problème à un problème de géométrie énumérative sur le produit $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de la droite projective par elle même. Bien que la résolution générale du problème de géométrie énumérative auquel nous arrivons soit hors de portée des méthodes que nous connaissons, la recherche de solutions particulières dans des systèmes linéaires convenablement choisis permet d'obtenir des exemples interessants. On constate par exemple que l'on retrouve ainsi, de manière assez systématique, plusieurs résultats qui apparaissent de manière isolée dans la littérature.*

INTRODUCTION. On fixe un corps k de caractéristique différente de 2. Le but de ce papier est la construction de courbes k-rationnelles (i.e. k-birationnellement équivalentes à la droite projective) sur la surface de Kummer $X = X_1 \times X_2/(\iota_1 \times \iota_2)$ où X_1 et X_2 sont deux k-courbes de genre 1, et ι_1 et ι_2 deux involutions k-hyperelliptiques de X_1 et X_2, c'est à dire deux k-involutions de X_1 et X_2 telles que les quotients X_1/ι_1 et X_2/ι_2 sont k-isomorphes à la droite projective. Il est facile de calculer des équations locales de la surface X (ce calcul est donné au début du §2) et cela permet de reformuler le problème qui nous interesse de la manière très explicite suivante : étant donnés deux polynômes $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$ de degré 3 ou 4, à coefficients dans k et sans racines multiples, nous cherchons à construire des solutions, dans le corps $k(u)$ des fractions rationnelles à coefficients dans k, à l'équation diophantienne $P_2(x_2(u))y(u)^2 = P_1(x_1(u))$.

Les raisons de s'interesser aux courbes k-rationnelles de la surface de Kummer X sont nombreuses et classiques ; rappelons en quelques unes. On montre facilement que l'image réciproque d'une courbe k-rationnelle de X par la projection canonique de $X_1 \times X_2$ sur X est une courbe k-hyperelliptique ; la construction de courbes k-rationnelles sur X est donc équivalente à la construction de courbes k-hyperelliptiques dont la jacobienne contient deux facteurs elliptiques. Lorsque le corps k est le corps des complexes, c'est le très classique problème de la réduction des intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques. Le cas particulier des courbes hyperelliptiques de genre 2 est particulièrement intéressant et est discuté dans deux des exemples que nous traitons ; on notera que nous ne supposons pas le corps de base algébriquement clôs et que le contrôle des corps de rationalité est un point important de notre approche. On sait aussi que la surface X possède plusieurs fibrations en courbes de genre 1 sur la droite projective ; on peut utiliser les courbes k-rationnelles de X qui ne sont pas contenues dans des fibres pour construire des changements de base qui augmentent le rang générique des fibrations ; lorsque le corps k est un corps de nombres, ce procédé est (au langage près) le procédé standard utilisé pour construire par spécialisation des familles de courbes dont le rang est strictement plus grand que le rang générique. Ce point de vue est développé dans [M-S]. Enfin, toujours dans le cas où k est un corps de nombres, rappelons que les conjectures de Batyrev-Manin ([B-M], §3.5) prédisent que les points rationnels de X sont presque tous situés sur des courbes k-rationnelles, et qu'il semble important de comprendre comment ils s'accumulent sur ces courbes. McKinnon ([McK]) a montré que les courbes k-rationnelles qui forment le premier ensemble d'accumulation des points rationnels sur certaines surfaces du type de X sont, pour des hauteurs bien choisies, les courbes k-rationnelles dont la construction est évidente (ce sont les courbes appellées triviales dans le §1.1 de ce papier). On sait très peu de choses sur les ensembles d'accumulations suivants. Bien que nous ne soyons rien capable de prouver dans cette direction à l'heure actuelle, il est raisonnable de penser que certaines des courbes construites dans ce papier appartiennent au second de ces ensembles. La production un peu systématique d'exemples de courbes k-rationnelles sur la surface X nous semble interessante de ce point de vue.

Dans tout le papier k est un corps de caractéristique différente de 2 et $\overline{k}$ une clture algébrique de k. On fixe deux couples (X_1, ι_1) et (X_2, ι_2) où X_1 et X_2 sont deux k-courbes lisses, géométriquement intègres de genre 1, et où ι_1 et ι_2 sont deux involutions k-hyperelliptiques sur X_1 et X_2, c'est à dire des k-involutions telles que les quotients X_1/ι_1 et X_2/ι_2 sont k-isomorphes à la droite projective $\mathbf{P}_{1,k}$. Le quotient $X = X_1 \times X_2/(\iota_1 \times \iota_2)$ est une k-surface géométriquement intègre, possédant 16 points singuliers, et dont le modèle lisse est une surface de Kummer ; c'est sur cette surface que nous voulons construire des courbes k-rationnelles. Pour $i = 1, 2$, on note $\pi_i : X_i \to X_i/\iota_i = \mathbf{P}_{1,k}$ la projection canonique ; le produit $\pi_1 \times \pi_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ se factorise naturellement par la projection canonique $X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2/(\iota_1 \times \iota_2) = X$ et on note $\pi : X \to \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ le k-morphisme de factorisation. Le principe de notre construction consiste à construire des courbes k-rationnelles sur X en remontant des courbes k-rationnelles de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$; l'efficacité du procédé repose sur le fait que la géométrie de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est plus simple que celle de X.

Nous avons divisé ce travail en deux paragraphes. Dans le premier, on étudie les composantes irréductibles de l'image réciproque d'une courbe de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ par le morphisme canonique $\pi : X \to \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$. On montre (corollaire 1.2.4) que les courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ dont les images réciproques par π ont des composantes k-rationnelles sont les courbes k-rationnelles de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui rencontrent la courbe de ramification Z du k-morphisme π d'une manière imposée ; on ramène ainsi le problème de la recherche des courbes k-rationnelles de X à un problème de géométrie énumérative dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$. On sait que c'est la un problème difficile en général ; on montre dans le second paragraphe qu'il est abordable pour des courbes dont le bidegré reste raisonable (par rapport aux moyens de calculs dont on dispose) et donne des résultats non triviaux. Dans le second paragraphe nous traitons quatres exemples. Dans le premier exemple nous traitons le cas le plus simple qui est celui des courbes de bidegré $(1,1)$. On constate que l'on retrouve de cette manière des formules classiques attribuées à Legendre et Jacobi. Le deuxième exemple semble moins classique ; il illustre le fait que les couples (X_1, ι_1) et (X_2, ι_2) ne sont pas nécessairement formés d'une courbe elliptique et de la multiplication par -1 ; dans le point de vue des équations diophantiennes, cela se traduit par le fait que les polynômes $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$ sont de degré 4 et n'ont pas nécessairement de racines dans le corps de base k. Le troisième exemple est choisi de manière à retrouver un résultat établi, dans un autre contexte, par J.-F. Mestre. Enfin, dans le quatrième exemple, on s'interesse aux courbes k-rationnelles de X qui correspondent aux courbes hyperelliptique de genre 2 dont la jacobienne est décomposée. Cela nous amène à rechercher dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ des courbes k-rationnelles de bidegré (n,n), très singulières, et rencontrant la courbe de ramification Z de π de manière imposée. Le cas $n = 3$ est facile à traiter et redonne des formules classiques. Peu de choses sont connus pour les valeurs de $n > 3$. La méthode présentée ici permet d'aborder les cas $n = 4$ et $n = 5$; chaque fois que l'on a trouvé un exemple dans la littérature (on en signale un certains nombre à la fin du papier) il nous a été relativement facile de le retrouver par notre procédé. Une étude plus générale nécessiterait d'avoir des informations complémentaires sur les singularités des courbes de bidegré (n,n) que l'on cherche à contruire. Cette étude est abordée dans [Sat] et mérite sans doute d'être poussée plus loin.

1 Relèvement des courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ sur la surface de Kummer X.

Dans ce premier paragraphe nous expliquons comment calculer le genre géométrique des composantes irréductibles des images réciproques par π des courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ et nous en déduisons la caractérisation des courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ dont l'image réciproque par π contient des courbes k-rationnelles en utilisant le fait que les courbes k-rationnelles sont les courbes de genre géométrique 0 qui possèdent des points rationnels.

1.1 Notations.

Pour $i = 1, 2$, on désigne par $R_0^{(i)}, \ldots, R_3^{(i)}$ les quatre $\overline{k}$-points fixes de l'involution ι_i, et par $r_0^{(i)}, \ldots, r_3^{(i)}$ leurs images respectives par la projection canonique

$\pi_i : X_i \to X_i/\iota_i = \mathbf{P}_{1,k}$; on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des seize $\overline{k}$-points de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ formé des $r_{m,n} = (r_m^{(1)}, r_n^{(2)})$ où $m, n = 0, \ldots, 3$. Pour tout $\overline{k}$-point r de $\mathbf{P}_{1,k}$, on note $L_1(r)$ (resp. $L_2(r)$) la $\overline{k}$-courbe $\mathbf{P}_{1,k} \times \{r\}$ (resp. $\{r\} \times \mathbf{P}_{1,k}$) de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$. Pour $n, m \in \{0, \ldots, 3\}$, on pose $L_1(n) = L_1(r_n^{(2)})$ et $L_2(m) = L_2(r_m^{(1)})$; les courbes $L_1(n)$ et $L_2(m)$ se coupent donc en $r_{m,n}$; on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des huit courbes $\{L_i(n),\ i = 1, 2,\ n = 0, \ldots, 3\}$. On désigne par Z la courbe (réduite) de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ dont le support est la réunion des huit courbes de $\mathcal{L}$; c'est la courbe de ramification du morphisme π ; ses points singuliers sont les seize points de $\mathcal{P}$ et sont aussi les images par π des seize points singuliers de X.

Toute courbe $L_i(n) \in \mathcal{L}$ est une courbe $\overline{k}$-rationnelle de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$; elle est k-rationnelle si et seulement si le point $r_n^{(i)}$ est défini sur k ; comme $L_i(n)$ est dans le lieu de ramification de π, son image réciproque, munie de sa structure de schéma réduit, est une courbe $\overline{k}$-rationnelle de X qui est k-rationnelle si et seulement si $L_i(n)$ est k-rationnelle, c'est à dire si et seulement si $r_n^{(i)}$ est défini sur k. Dans la suite ces courbes k-rationnelles seront appelées les courbes k-rationnelles triviales de X.

Si D est une $k-$courbe géométriquement intègre, on note $\overline{k}(D)$ le corps des $\overline{k}$-fonctions rationnelles sur D ; les valuations discrètes de $\overline{k}(D)$ qui sont triviales sur $\overline{k}$ et normalisées par le fait que leurs groupes des valeurs est $\mathbf{Z}$ tout entier seront appelées les branches de D. On note $\mathcal{V}_D$ l'ensemble des branches de D ; le corps de définition de la branche $v \in \mathcal{V}_D$ est le corps résiduel de l'anneau de la restriction de v au sous corps $k(D)$ de $\overline{k}(D)$ formé des k-fonctions rationnelles. S'il existe un $\overline{k}$-point de D dont l'anneau local dans $\overline{k}(D)$ est dominé par l'anneau de la valuation v, ce $\overline{k}$-point est unique (les k-courbes sont, par hypothèse, des k-schémas séparés) et est appelé le centre de v. Toutes les courbes considérées dans ce papier sont des courbes projectives, donc toutes les branches ont un centre.

1.2 Le calcul du genre.

Pour $i \in \{1, 2\}$, choisissons des coordonnées $(u_{i,0} : u_{i,1})$ sur la droite projective $\mathbf{P}_{1,k} = X_i/\iota_i$ et notons U_i et U'_i les k-ouverts $\mathbf{P}_{1,k} \setminus \{(0:1)\}$ et $\mathbf{P}_{1,k} \setminus \{(1:0)\}$ de $\mathbf{P}_{1,k}$. On sait que le couple (X_i, ι_i) se décrit de la manière suivante : il existe une forme $F_i(u_{i,0}, u_{i,1})$ de degré 4, bien définie à multiplication par le carré d'un élément non nul de k près, telle que les ouverts $\pi^{-1}(U_i)$ et $\pi^{-1}(U'_i)$ de X_i qui recouvrent X sont les k-courbes affines d'équations respectives $v_i^2 = P_i(u_i)$ et $v'^2_i = P'_i(u'_i)$ où $P_i(u_i) = F_i(1, u_i)$ et $P'_i(u'_i) = F_i(1, u'_i)$; ces deux ouverts se recollent par $u'_i = 1/u_i$, $v'_i = v_i/u_i^2$, et ι_i envoie le point de coordonnées (u_i, v_i) (resp. (u'_i, v'_i)) sur le point de coordonnées $(u_i, -v_i)$ (resp. $(u'_i, -v'_i)$). Un calcul élémentaire montre que l'ouvert $\pi^{-1}(U_1 \times U_2)$ de X est la k-surface affine de l'espace affine $\mathbf{A}^3_k$ d'équation $v^2 = P_1(u_1)P_2(u_2)$; notons que $P_1(u_1)P_2(u_2) = 0$ est une équation de la courbe Z sur $U_1 \times U_2$, donc on obtient une équation de l'ouvert $\pi^{-1}(U_1 \times U_2)$ de X en extrayant la racine carré d'une équation locale de Z bien normalisée. On décrit bien sûr de manière analogue $\pi^{-1}(U_1 \times U'_2)$, $\pi^{-1}(U'_1 \times U_2)$, et $\pi^{-1}(U'_1 \times U'_2)$ qui, avec $\pi^{-1}(U_1 \times U_2)$, recouvrent X ; les formules de recollement sont immédiates à écrire. On introduit la définition suivante :

Définition 1.2.1 *Une bonne k-équation locale de Z est une k-équation locale (U, f) de Z (i.e. un k-ouvert affine $U \subset \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ et une k-fonction régulière f sur U dont le schéma des zéros est $Z \cap U$) telle que l'anneau des coordonnées du k-ouvert affine $\pi^{-1}(U)$ de X est $A[\sqrt{f}]$ où A désigne l'anneau des coordonnées de U.*

On considère maintenant une k-courbe D géométriquement intègre de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui n'est pas contenue dans Z. Soit v une branche de D et (U, f) une bonne k-équation locale de Z telle que le centre de v appartient à U (on peut par exemple prendre pour U l'un des quatres ouverts $U_1 \times U_1'$, $U_1 \times U_2'$, $U_2 \times U_1'$ ou $U_2 \times U_2'$ qui recouvrent $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ et pour f l'équation locale que l'on a explicitée plus haut). Comme D n'est pas inclue dans Z, la restriction de f à D n'est pas nulle et définit donc un élément non nul du corps $k(D)$ que l'on note f_D. L'entier $v(f_D)$ ne dépend pas du choix de (U, f) et est, par définition, la multiplicité d'intersection de la branche v avec Z. Si P est un $\overline{k}$-point de D, la multiplicité d'intersection de D et Z en P est donc la somme des multiplicités des branches de D centrées en P avec Z. On pose :

Définition 1.2.2 *Soit D une $k-$courbe de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui est géométriquement intègre et qui n'est pas contenue dans la courbe Z. Pour toute branche v de D, on note $m(v)$ la multiplicité d'intersection de la branche v avec Z. On note $\mathcal{R}_D$ l'ensemble des branches de D pour lesquelles $m(v)$ est impair.*

On rappelle que le genre géométrique d'une k-courbe géométriquement intègre est, par définition, le genre d'un $\overline{k}$ modèle propre et lisse de cette courbe ; on a :

Proposition 1.2.3 *Soit D une $k-$courbe de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui est géométriquement intègre et qui n'est pas contenue dans Z. Si g_D est le genre géométrique de D et si r_D est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{R}_D$ défini en 1.2.2, on a :*

i) Si $\mathcal{R}_D$ est non vide, l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D par π est une $k-$courbe de X qui est géométriquement intègre et dont le genre géométrique est $g = 1 + 2(g_D - 1) + \frac{r_D}{2}$ (et donc r_D est pair).

ii) Si $\mathcal{R}_D$ est vide, si (U, f) est une bonne k-équation locale de Z et si $f_D \in k(D)$ est la restriction de f à D, alors :

ii)$_1$ si f_D n'est pas un carré dans le corps $\overline{k}(D)$, l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D par π est une $k-$courbe de X qui est géométriquement intègre et dont le genre géométrique est $g = 1 + 2(g_D - 1)$;

ii)$_2$ si f_D est un carré dans le corps $\overline{k}(D)$, l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D par π est la réunion de deux $\overline{k}$-courbes de X qui sont $\overline{k}$-birationnellement équivalentes à D ; ces deux $\overline{k}$-courbes sont des k-courbes de X si et seulement si f_D est un carré dans le corps $k(D)$ et, dans ce cas, elles sont k-birationnellement équivalentes à D.

Démonstration: Fixons une famille finie $(U^{(i)}, f_i)_{i\in I}$ de bonnes k-équations locales de Z dans laquelle $(U^{(i)})_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ et les $U^{(i)}$ sont des k-ouverts affines d'anneau de coordonnées A_i. La famille $(U^{(i)} \cap D)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de D et les $U^{(i)} \cap D$ sont des k-ouverts affines dont les anneaux de coordonnées sont notés $A_{i,D}$; pour $i \in I$, on note $f_{i,D} \in A_{i,D}$ la restriction de f_i à D. Par définition $\pi^{-1}(U^{(i)})$ est un k-ouvert affine de X d'anneau de coordonnées $A_i[\sqrt{f_i}]$, donc $\pi^{-1}(U^{(i)}) \cap \pi^{-1}(D)$ est un le k-schéma affine d'anneau des coordonnées $A_i[\sqrt{f_i}] \otimes_{A_i} A_{i,D} = A_{i,D}[\sqrt{f_{i,D}}]$. Ainsi, $\pi^{-1}(D)$ est géométriquement intègre si et seulement si, quelque soit $i \in I$, $f_{i,D}$ n'est pas un carré dans le corps des fractions de $A_{i,D} \otimes_k \overline{k}$ qui est $\overline{k}(D)$. Soit maintenant (U, f) une bonne k-équation locale de Z ; il résulte immédiatement des définitions que, pour tout $i \in I$, il existe un $g_i \in k(\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k})$ tel que $f = f_i g_i^2$; en conséquence la restriction f_D de f à D est $f_D = f_{i,D} g_{i,D}^2$ où $g_{i,D}$ est la restriction de g_i à D. Ainsi f_D n'est pas un carré dans $\overline{k}(D)$ si et seulement si aucun des $f_{i,D}$ n'est un carré dans $\overline{k}(D)$, et donc si et seulement si la courbe $\pi^{-1}(D)$ est géométriquement intègre.

Montrons *i)* : Par hypothèse $\mathcal{R}_D$ n'est pas vide, c'est à dire qu'il existe au moins une valuation discrète v de $\overline{k}(D)$ triviale sur $\overline{k}$ telle que $v(f_D)$ est impair, donc f_D n'est pas un carré dans $\overline{k}(D)$; on vient de voir que cela implique que $\pi^{-1}(D)$ est géométriquement intègre. D'autre part, la théorie de Kummer montre qu'une valuation discrète w de $\overline{k}(D)$ triviale sur $\overline{k}$ est ramifiée dans l'extension $\overline{k}(D)(\sqrt{f_D})$ si et seulement si $w(f_D)$ est impair, c'est à dire si et seulement si $w \in \mathcal{R}_D$. Il résulte alors de la formule de Riemann-Hurwitz que le genre du corps $\overline{k}(D)(\sqrt{f_D})$, qui est le genre géométrique de $\pi^{-1}(D)$, est $1 + 2(g_D - 1) + \frac{r_D}{2}$, ce qu'on voulait.

Montrons *ii)* : Si f_D n'est pas un carré dans $\overline{k}(D)$, on raisonne comme dans le cas *i)*. Sinon, les assertions résultent immédiatement de la description locale de $\pi^{-1}(D)$ que l'on a explicité dans la première partie de cette démonstration.□

Remarque: Les équivalences birationnelles du cas *ii)*$_2$ de la proposition précédente ne sont pas nécessairement des isomorphismes (on fabrique facilement des exemples où D est une courbe singulière, et où ces équivalences birationnelles sont des désingularisations de $D \times_k \overline{k}$.

Dans ce papier nous utiliserons le corollaire suivant de la proposition 1.2.3 :

Corollaire 1.2.4 *Soit D une courbe k-rationnelle de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui n'est pas contenue dans Z, et soit r_D le cardinal de $\mathcal{R}_D$ (définition 1.2.2). Alors*

1) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D dans X est une k-courbe géométriquement intègre de genre géométrique zéro ;

(ii) $r_D = 2$.

2) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D dans X possède deux $\overline{k}$-composantes irréductibles C_1 et C_2 qui, si on les munit de leurs structures de schémas réduits, sont de genre géométrique zéro ;

(ii) $r_D = 0$.

3) Si $r_D \neq 0, 2$, *alors aucune composante de* $\pi^{-1}(D)$ *n'est* $\overline{k}$*-rationnelle.*

Démonstration: La courbe D étant de genre géométrique 0, elle n'admet pas de revêtement non ramifié de degré strictement positif, donc si $\mathcal{R}_D$ est vide i.e. si $r_D = 0$, l'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D n'est pas géométriquement intègre. Compte tenu de cette remarque, nos assertions résultent immédiatement de la proposition 1.2.3. □

Comme toute courbe k-rationnelle de X est une composante de l'image réciproque par π de son image dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$, et que l'image d'une courbe k-rationnelle par un k-morphisme est une courbe k-rationnelle, le corollaire précédent ramène la recherche des courbes k-rationnelles sur la surface de Kummer X aux deux problèmes suivants : d'une part le problème géométrique de trouver les courbes k-rationnelles D de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ avec $r_D = 0$ ou 2, et d'autre part le problème arithmétique de décider, dans le cas $r_D = 0$ si les deux $\overline{k}$-composantes de $\pi^{-1}(D)$ sont définies sur k (ce qui implique qu'elles sont k-rationnelles puisqu'elles sont alors k-birationnellement équivalentes à D), et dans le cas $r_D = 2$ si la k-courbe géométriquement intègre $\pi^{-1}(D)$ qui est de genre géométrique 0 possède des points rationnels sur k.

2 Exemples.

Dans la présentation des exemples nous utiliserons les notations introduites au début du §1.2. Les coordonnées $(u_{i,0} : u_{i,1})$ sur la droite projective $\mathbf{P}_{1,k} = X_i/\iota_i$ seront choisis de manière adaptée à l'exemple traité. Rappelons que le k-ouvert affine $\pi^{-1}(U_1 \times U_2)$ de X est k-isomorphe à la k-surface affine de $\mathbf{A}^3_k$ d'équation $v^2 = P_1(u_1)P_2(u_2)$. Les points singuliers de cet ouvert sont les points dont la coordonnée v est 0 ; le morphisme d'éclatement de ces points singuliers est le morphisme de la k-surface $\mathbf{A}^2_k \times \mathbf{P}_{1,k}$ d'équation $P_2(x_2)y_1^2 = P_1(x_1)y_0^2$ sur la k-surface de l'espace affine $\mathbf{A}^3_k$ d'équation $v^2 = P_1(u_1)P_2(u_2)$ qui envoie le point de coordonnées $(x_1, x_2, (y_0 : y_1))$ sur $(u_1 = x_1, u_2 = x_2, v = P_2(x_2)y_1/y_0)$ si $y_0 \neq 0$ et sur $(u_1 = x_1, u_2 = x_2, v = P_1(x_1)y_0/y_1)$ si si $y_1 \neq 0$. La partie $y_0 \neq 0$ de cet éclaté est donc un k-ouvert affine du modèle lisse X^{lisse} de X qui est k-isomorphe à la k-surface affine de $\mathbf{A}^3_k$ d'équation $P_2(x_2)y^2 = P_1(x_1)$. Nous explicitons les paramétrisations des courbes k-rationnelles que nous construisons dans cet ouvert affine de X^{lisse} ; on trouve ainsi les solutions de l'équation diophantienne qui a été mentionnée dans l'introduction.

Pour toute k-courbe D de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ non contenue dans Z, toute branche v de D, et tout couple (i, n) avec $i = 1, 2$ et $n = 0, \ldots, 3$, on note $m(i, n; v)$ la multiplicité d'intersection de la branche v avec la droite $L_i(n)$; on a donc $v \in \mathcal{R}_D$ si et seulement si $\sum_{(i,n)} m(i, n; v)$ est impair.

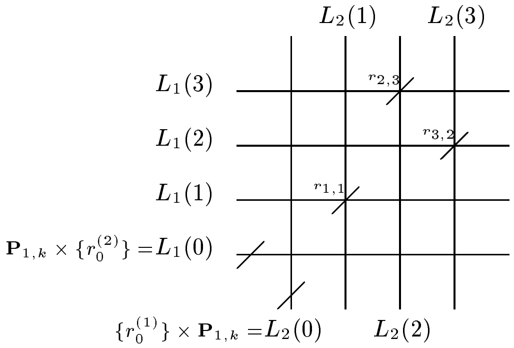
2.1 Exemple 1.

Relèvement des courbes de bidegré $(1, 1)$

Une k-courbe D intègre et de bidegré $(1,1)$ est propre, lisse et k-rationnelle ; l'application qui envoie une branche de D sur son centre permet donc d'identifier l'ensemble des branches de D avec l'ensemble des $\overline{k}$-points de D. Pour tout couple (j,m), la courbe D coupe $L_j(m)$ en un unique point $p_{j,m}$ et avec multiplicité 1 ; ainsi, si $v^{(j,m)}$ est la branche de D dont le centre est $p_{j,m}$, on a $m(j,m;v^{(j,m)}) = 1$. Si $p_{j,m}$ n'est sur aucune droite de $\mathcal{L}$ distincte de $L_j(m)$, on a $m(i,n;v^{(j,m)}) = 0$ pour tout $(i,n) \neq (j,m)$, et donc $v^{(j,m)} \in \mathcal{R}_D$. Sinon il existe un $n \in \{0,\dots 3\}$ et un seul tel que $p_{j,m}$ est le point d'intersection de la droite $L_j(m)$ avec la droite $L_i(n)$ où i est défini par $\{i,j\} = \{1,2\}$; on a alors $p_{j,m} = r_{m,n}$ (resp. $r_{n,m}$) si $j = 2$ donc $i = 1$ (resp. $j = 1$ donc $i = 2$). Dans ce cas on a $m(j,m;v^{(j,m)}) = m(i,n;v^{(j,m)}) = 1$ et , pour tout $(i',n') \neq (j,m),\ (i,n)$, on a $m(i',n';v^{(j,m)}) = 0$; on a donc $v^{(j,m)} \notin \mathcal{R}_D$.

Le cas $\mathbf{r_D = 0}$. Supposons qu'il existe une k-courbe D intègre et de bidegré $(1,1)$ avec $r_D = 0$; alors, pour tout $m = 0,\dots,3$, il existe un et un seul $n = \alpha(m) \in \{0,\dots,3\}$ tel que $p_{2,m} = p_{1,\alpha(m)}$ est le point d'intersection $r_{m,\alpha(m)}$ de $L_2(m)$ avec $L_1(\alpha(m)$. L'application α est une bijection de l'ensemble $\{0,\dots,3\}$ sur lui même (si $\alpha(m) = \alpha(m')$ avec $m \neq m'$, la courbe D contient $L_1(\alpha(m))$, donc n'est pas intègre) et le k-isomorphisme de $\mathbf{P}_{1,k}$ dont le graphe est D envoie les quatre $\overline{k}$-points $r_0^{(1)},\dots,r_3^{(1)}$ respectivement sur $r_{\alpha(0)}^{(2)},\dots,r_{\alpha(3)}^{(2)}$; notons ξ cet isomorphisme. Le k-isomorphisme $\xi : \mathbf{P}_{1,k} \to \mathbf{P}_{1,k}$ se relève en un $\overline{k}$ isomorphisme $\tilde{\xi} : X_1 \to X_2$ qui est compatible avec les involutions. Il est alors facile de vérifier que les deux $\overline{k}$-composantes de $\pi^{-1}(D)$ sont les images par $\theta : X_1 \times X_2 \to X$ des deux courbes images de $(id,\tilde{\xi}) : X_1 \to X_1 \times X_2$ et de $(\iota_1,\tilde{\xi}) : X_1 \to X_1 \times X_2$. Ces composante sont définies sur k si et seulement si $\tilde{\xi}$ est défini sur k. Bien entendu les courbes k-rationnelles ainsi produites sont évidentes à trouver directement, et nous n'avons traité ce cas que pour être complet.

Le cas $\mathbf{r_D = 2}$. Supposons qu'il existe une k-courbe D intègre et de bidegré $(1,1)$ avec $r_D = 2$; alors, il existe au moins un $m(D) \in \{0,1,2,3\}$ tel que $p_{2,m(D)}$ n'est sur aucune des quatre droites $L_1(n)$ pour $n = 0,\dots,3$ puisque sinon, comme on vient de le voir, on aurait $r_D = 0$. Pour la même raison, il existe au moins un $n(D) \in \{0,1,2,3\}$ tel que $p_{1,n(D)}$ n'est sur aucune des quatre droites $L_2(m)$ pour $m = 0,\dots,3$. Ainsi les deux branches de D centrées respectivement en $p_{2,m(D)}$ et en $p_{1,n(D)}$ sont dans $\mathcal{R}_D$, et donc aucune autre branche de D n'est dans $\mathcal{R}_D$. Comme dans le cas précédent, on en déduit que si $m \in \{0,1,2,3\} \setminus \{m(D)\}$, il existe un et un seul $n = \alpha(m) \in \{0,\dots,3\} \setminus \{n_1(D)\}$ tel que $p_{2,m} = p_{1,\alpha(m)}$ est le point d'intersection $r_{m,\alpha(m)}$ de $L_2(m)$ avec $L_1(\alpha(m))$, et que α est une bijection de $\{0,1,2,3\}\setminus\{m(D)\}$ sur $\{0,1,2,3\}\setminus\{n(D)\}$. Quitte à changer les indices nous pouvons supposer que $m(D) = n(D) = 0$, de sorte que la situation se décrit par la figure suivante où les obliques représentent les intersections de la courbe D avec les $L_i(n)$ (dans l'exemple ci-dessous, on respecte le choix $m(D) = n(D) = 0$, et on a $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 3$ et $\alpha(3) = 2$) :



Comme la courbe D est définie sur k, les deux droites $L_2(0)$ et $L_1(0)$ sont définies sur k, donc les deux points $r_0^{(1)}$ et $r_0^{(2)}$ sont définis sur k et le zéro cycle $(r_{1,\alpha(1)}) + (r_{2,\alpha(2)}) + (r_{3,\alpha(3)})$ de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est rationnel sur k. Notons (*) la condition suivante :

(*) Il existe une bijection α de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sur lui même telle que le zéro cycle $(r_{1,\alpha(1)}) + (r_{2,\alpha(2)}) + (r_{3,\alpha(3)})$ de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est rationnel sur k.

La condition (*) est une partie des conditions nécessaires que l'on vient de mettre en évidence, à l'existence d'une k-courbe D intègre de bidegré $(1, 1)$ avec $r_D = 2$. Notons qu'elle implique que chacun des deux points $r_0^{(1)}$ et $r_0^{(2)}$ est défini sur k, et donc que chacune des deux droites $L_2(0)$ et $L_1(0)$ est aussi définie sur k.

Supposons la condition (*) vérifiée ; notons qu'elle implique que les trois $\overline{k}$-points $r_{1,\alpha(1)}$, $r_{2,\alpha(2)}$, et $r_{3,\alpha(3)}$ ne sont pas situés sur une réunion de courbes de bidegré $(0, 1)$ ou $(1, 0)$). Il en résulte qu'il existe une et une seule courbe D_α de bidegré $(1, 1)$ passant par les trois $\overline{k}$-points $r_{1,\alpha(1)}$, $r_{2,\alpha(2)}$, et $r_{3,\alpha(3)}$ de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$, et que cette courbe est intègre ; de plus elle est définie sur k puisque le zéro cycle $(r_{1,\alpha(1)}) + (r_{2,\alpha(2)}) + (r_{3,\alpha(3)})$ de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est, par hypothèse, rationnel sur k. On a $r_{D_\alpha} = 2$ si et seulement si les points d'intersection $p_{1,0}$ et $p_{2,0}$ de D_α avec $L_1(0)$ et $L_2(0)$ sont distincts, c'est à dire si D_α ne passe pas par le point $r_{0,0}$.

Notons enfin que, lorsque D_α vérifie toute ces conditions, la partie arithmétique est automatiquement résolue : en effet, les images réciproques des deux points rationnels $p_{1,0}$ et $p_{2,0}$ par π sont deux points de $\pi^{-1}(D_\alpha)$ qui sont aussi rationnels puisque ce sont des points de ramification de π. La courbe $\pi^{-1}(D_\alpha)$ est donc k-rationnelle.

Plaçons nous dans des coordonnées adaptées à notre situation : pour $i = 1, 2$, on choisit les coordonnées $(u_{i,0} : u_{i,1})$ sur la droite projective de sorte que $r_0^{(i)}$ est le point de coordonnées $(0 : 1)$ et que la $i^{ème}$ projection du point rationnel $p_{i,0}$ est le point de coordonnées $(0 : 1)$. Avec ces choix, les points $p_{1,0}$ et $p_{2,0}$ sont les points de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de coordonnées $((1 : 0), (0 : 1))$ et $((0 : 1), (1 : 0))$; la courbe D_α passe par ces deux points, est intègre, et est définie sur k, donc elle a pour équation $u_{1,1}u_{2,1} - \lambda u_{1,0}u_{2,0}$ où λ est un élément non nul de k. D'autre part, le point $r_0^{(i)}$ étant défini sur k, le point $R_0^{(i)}$ est aussi défini sur k ; on munit X_i de la structure de k-courbe elliptique pour laquelle $R_0^{(i)}$ est l'origine ; l'involution ι_i est alors la multiplication par -1 et on pose $X_i = E_i$ pour rappeller ce choix. On prend $u_i = u_{i,1}/u_{i,0}$ comme coordonnée dans l'ouvert affine U_i défini par $u_{i,0} \neq 0$ et on note $P_i(u_i)$ le polynôme unitaire dont les racines sont les coordonnées des trois points $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ et $r_3^{(i)}$ de U_i. Ainsi $v_i^2 = P_i(u_i)$ est un modèle de Weierstrass de E_i ; comme la $i^{ème}$ projection de $p_{i,0}$ est le point de coordonnées $u_i = 0$ dans U_i, et n'est ni $r_1^{(i)}$, ni $r_2^{(i)}$, ni $r_3^{(i)}$, on a $P_i(0) \neq 0$. Enfin, pour $m = 1, 2, 3$, la courbe D_α passe par le point $(r_m^{(1)}, r_{\alpha(m)}^{(2)})$ de $U_1 \times U_2$, donc le polynme $P_2(u_2)$ et la fonction rationnelle $P_1(\lambda/u_2)$ ont les mêmes zéros ; si l'on pose $P_i(u_i) = u_i^3 + a_iu_i^2 + b_iu_i + c_i$ cela se traduit par $a_2 = b_1\lambda/c_1, b_2 = a_1\lambda^2/c_1$ et $c_2 = \lambda^3/c_1$. Si toutes ces conditions sont vérifiées, la courbe D_α d'équation $u_{1,1}u_{2,1} - \lambda u_{1,0}u_{2,0}$ est une k-courbe intègre de bidegré $(1,1)$ pour laquelle $r_D = 2$. Il est facile de calculer et de paramétriser l'image réciproque de D_α ; en posant $w = \lambda/c_1$ on trouve :

Proposition 2.1.1 *La surface X contient une courbe k-rationnelle C dont l'image dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est une courbe D de bidegré $(1,1)$ avec r_D=2 si et seulement si X_1 et X_2 sont deux k-courbes elliptiques E_1 et E_2 de modèle de Weierstrass $v_1^2 = u_1^3 + au_1^2 + bu_1 + c$ et $v_2^2 = u_2^3 + bwu_2^2 + acw^2u_2 + c^2w^3$ où a, b, c et w sont dans k, et où c et w non nuls, les involutions ι_1 et ι_2 étant la multiplication par -1.*

Dans l'ouvert affine de X^{lisse} d'équation $(x_2^3 + bwx_2^2 + acw^2x_2 + c^2w^3)y^2 = (x_1^3+ax_1^2+bx_1+c)$ dans $\mathbf{A}_k^3$, la courbe k-rationnelle C admet la paramétrisation $z \to (x_1 = \xi_1(z), x_2 = \xi_2(z), y = \xi_3(z))$ où

$$\begin{aligned} &\xi_1(z) = wz^2, \\ &\xi_2(z) = \tfrac{c}{z^2}, \\ &\textit{et } \xi_3(z) = \tfrac{z^3}{c}. \end{aligned}$$

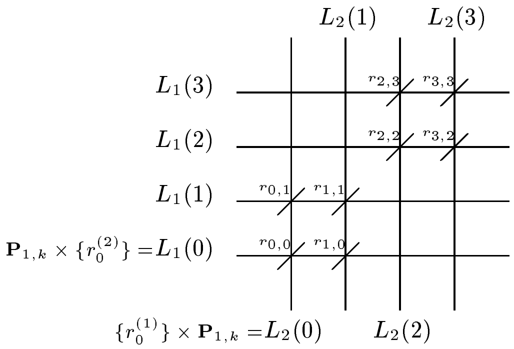
On peut interpréter la condition (*) en introduisant les modules galoisiens $E_1[2]$ et $E_2[2]$ des $\overline{k}$-points tués par 2 des courbes elliptiques E_1 et E_2. La bijection ensembliste de $E_1[2] = \{R_0^{(1)}, \ldots, R_3^{(1)}\}$ sur $E_2[2] = \{R_0^{(2)}, \ldots, R_3^{(2)}\}$ qui envoie $R_0^{(1)}$ sur $R_0^{(2)}$ et $R_m^{(1)}$ sur $R_{\alpha(m)}^{(2)}$ pour $m = 1, 2, 3$ est un isomorphisme de groupe et la condition (*) est équivalente au fait que cet isomorphisme de groupe est un isomorphisme de $Gal(\overline{k}/k)$ module. Il est immédiat de vérifier que la condition pour que la courbe D_α ne passe pas par le point $r_{0,0}$, c'est à dire pour que $r_{D_\alpha} = 2$, est que ce k-isomorphisme de $Gal(\overline{k}/k)$-module n'est pas induit par un isomorphisme de courbes elliptiques. En utilisant, dans le cas particulier qui nous intéresse ici, les techniques de [F-K] ou [Sat], on peut vérifier que cette condition est la condition pour qu'il existe une k-courbe $\mathcal{C}$ de genre 2 et deux k-morphismes $\varphi_1 : \mathcal{C} \to E_1$ et $\varphi_2 : \mathcal{C} \to E_2$ qui sont de degré 2 et indépendants. On retrouve ce résultat en calculant l'image réciproque de la courbe k-rationnelle C de X par le morphisme $\theta : E_1 \times E_2 \to X$; on trouve, avec les notations introduites dans la proposition 2.1.1, que cette image réciproque est la courbe plane d'équation $y^2 = w^3x^6 + aw^2x^4 + bwx^2 + c$, et que la restriction à cette courbe des deux projections q_1 et q_2 de $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2 sont les morphismes φ_1 et φ_2 qui envoient le point de coordonnées (x, y) sur le point de E_1 de coordonnées $(u_1, v_1) = (wx^2, y)$ et sur le point de E_2 de coordonnées $(u_2, v_2) = (c/x^2, cy/x^3)$.

A la fin du dix neuvième siècle, la forme générale de l'intégrale hyperelliptique de genre 2 qui se ramène a des intégrales elliptiques par des transformations rationnelles de degré 2 a été donnée par Legendre ([Leg]) et Jacobi ([Jac]), et beaucoup discutée ([Kra], Chapitre X1, [Pic] par exemple). Comme c'était l'habitude au $XIX^{ième}$ siècle, Legendre et Jacobi énoncent leurs résultats à partir d'une forme de Rosenhain de la courbe hyperelliptique de genre 2, c'est à dire pour la courbe mise sous la forme $Y^2 = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Ils montrent que les intégrales des formes holomorphes de cette courbe se ramènent à des intégrales elliptiques par des transformations rationnelles de degré 2 si et seulement si $\gamma = \alpha\beta$. On retrouve ce résultat à partir du nôtre de la manière suivante : on note t_1, t_2, t_3 les trois racines de l'équation polynômiale $w^3T^3 + aw^2T^2 + bwT + c = 0$ et on calcule la forme de Rosenhain de la courbe d'équation $y^2 = w^3x^6 + aw^2x^4 + bwx^2 + c$ pour laquelle les trois points de Weierstrass de coordonnées $(t_1, 0)$, $(-t_1, 0)$ et $(t_2, 0)$ sont envoyés respectivement sur les points d'abscisses 0, ∞ et 1. Les trois points de Weierstrass restants qui sont les points de coordonnées $(-t_2, 0)$, $(t_3, 0)$ et $(-t_3, 0)$ sont alors respectivement envoyés sur les points d'abscisses $\gamma = (\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1})^2$, $\alpha = \frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\frac{t_3+t_1}{t_3-t_1}$ et $\beta = \frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\frac{-t_3+t_1}{-t_3-t_1}$; on a bien $\gamma = \alpha\beta$. Bien entendu, la forme de Rosenhain n'est pas adaptée aux questions de rationalité puisque les points de Weierstrass ne sont pas en général définis sur le corps de base de la courbe, ni même d'ailleurs sur le corps de définition des quotients elliptiques de la Jacobienne de cette courbe.

2.2 Exemple 2.

Relèvement non ramifié de certaines courbes de bidegré $(2, 2)$.

Dans cet exemple on cherche les courbes k-rationnelles de X dont l'image dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est une courbe D de bidegré $(2, 2)$ qui rencontre les huit droites $L_i(n)$ de $\mathcal{L}$ de la manière décrite dans la figure ci-dessous :



où les obliques représentent les intersections de la courbe D avec les $L_i(n)$. Autrement dit, la courbe D de bidegré $(2,2)$ passe par le sous-ensemble $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ formé des huit points $r_{0,0}$, $r_{0,1}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$, $r_{2,2}$, $r_{2,3}$, $r_{3,2}$, et $r_{3,3}$. Les seules branches d'une telle courbe qui rencontrent les $L_i(n)$ sont les huit $v^{(n,m)}$ centrées en $r_{n,m} \in \mathcal{P}_0$. Pour ces huit branches, on a $m(1,n;v^{(n,m)}) = m(2,m;v^{(n,m)}) = 1$ et tous les autres $m(i',n';v^{(n,m)})$ sont nuls, donc $v^{(n,m)} \notin \mathcal{R}_D$, et donc $r_D = 0$.

Supposons qu'il existe une courbe k-rationnelle D de bidegré $(2,2)$ qui coupe les $L_i(n)$ comme indiqué. Le fait que la courbe D est définie sur k implique que les deux droites $L_1(0)$ et $L_1(1)$ (resp. $L_1(2)$ et $L_1(3)$, resp. $L_2(0)$ et $L_2(1)$, resp. $L_2(2)$ et $L_2(3)$) sont soit définies sur k, soit définies sur une extension quadratique de k et conjuguées ; les deux points $r_0^{(2)}$ et $r_1^{(2)}$ (resp. $r_2^{(2)}$ et $r_3^{(2)}$, resp. $r_0^{(1)}$ et $r_1^{(1)}$, resp. $r_2^{(1)}$ et $r_3^{(1)}$) ont donc la mme propriété. D'autre part, comme une courbe de bidegré $(2,2)$ est de genre arithmétique 1, la courbe D a un point singulier et un seul, et donc ce point singulier est un point de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ rationnel sur k. Enfin, on suppose que la courbe k-rationnelle D a des points lisses rationnels en dehors de l'ensemble $\mathcal{P}$ (ce qui est toujours le cas si le cardinal de k est plus grand ou égal à 11) et on fixe un tel point. Pour $i = 1,2$, on choisit alors les coordonnées $(u_{i,0} : u_{i,1})$ de sorte que les points de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de coordonnées $((0:1),(0:1))$ et $((1:0),(1:0))$ sont respectivement le point rationnel lisse que l'on a fixé et le point singulier de D. Prenons $u_i = u_{i,1}/u_{i,0}$ comme coordonnée dans l'ouvert affine U_i défini par $u_{i,0} \neq 0$. L'ouvert affine $\pi_i^{-1}(U_i)$ de X_i a un modèle plan d'équation $v_i^2 = P_i(u_i)$ où P_i est un polynôme de degré 4 dont les racines sont les coordonnées des quatre points $r_0^{(i)}, \ldots, r_3^{(i)}$ de U_i. Comme les deux points $r_0^{(i)}$ et $r_1^{(i)}$ (resp. $r_2^{(i)}$ et $r_3^{(i)}$) sont soit définis sur k, soit définis sur une extension quadratique de k et conjugués, on a $P_i(u_i) = e_i(u_i^2 + a_i u_i + b_i)(u_i^2 + c_i u_i + d_i)$ où a_i, b_i, c_i, d_i et e_i sont dans k ; on peut noter que b_i et d_i sont non nuls puisque le point singulier de D est le point de coordonnées $(0,0)$ dans $U_1 \times U_2$ et que ce point singulier n'est sur aucune des $L_i(n)$ par hypothèse.

La courbe D appartient au système linéaire des courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de bidegré $(2,2)$ passant par les huit points de $\mathcal{P}_0$. Ce système linéaire est de dimension 1 puisque le système linéaire de toutes les courbes de bidegré $(2,2)$

est de dimension 9 ; il est formé des courbes $\mathcal{D}_{(\lambda:\mu)}$ dont trace dans $U_1 \times U_2$ a pour équation

$(\lambda(a_2 - c_2)u_1^2u_2^2 + (\lambda(a_1a_2 - c_1c_2) + \mu(c_1 - a_1))u_1u_2^2 + \mu(a_2 - c_2)u_1^2u_2 + (\lambda(a_2b_1 - d_1c_2) + \mu(d_1 - b_1))u_2^2 + (\lambda(a_2d_2 - b_2c_2) + \mu(b_2 - d_2))u_1^2 + (\lambda a_2c_2(a_1 - c_1) + \mu(a_2c_1 - a_1c_2))u_1u_2 + (\lambda a_2c_2(b_1 - d_1) + \mu(d_1a_2 - b_1c_2))u_2 + (\lambda(d_2a_2a_1 - c_2b_2c_1) + \mu(b_2c_1 - d_2a_1))u_1 + \lambda(b_1a_2d_2 - b_2c_2d_1) + \mu(d_1b_2 - b_1d_2) = 0.$

Conformément à l'habitude, lorsque nous travaillons dans $U_1 \times U_2$ nous notons (∞, ∞) le point de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de coordonnées $((0:1),(0:1))$. La seule courbe de cette famille qui peut tre géométriquement intègre et passer par le point de coordonnées $(u_1, u_2) = (0,0)$ avec multiplicité 2 et par le point (∞, ∞) avec multiplicité 1, est la courbe $D = D_{(0:1)}$. Cette courbe passe par $(0,0)$ et (∞,∞) avec les multiplicités voulues si et seulement si $d_1a_2 - b_1c_2 = 0$, $c_1b_2 - d_2a_1 = 0$ et $d_1b_2 - b_1d_2 = 0$; elle est géométriquement intègre si et seulement si $d_2c_1^2 - d_1c_2^2 \neq 0$ comme on le voit sur l'éqution de sa trace dans $U_1 \times U_2$ qui est :

$$c_2u_1^2u_2 - c_1u_2^2u_1 + d_2u_1^2 - d_1u_2^2 = 0.$$

En remontant cette courbe D, on trouve que les deux composantes de $\pi^{-1}(D)$ sont définies sur l'extension quadratique $k(\sqrt{e_1/e_2})$ et un calcul facile donne :

Proposition 2.2.1 *Pour $i = 1, 2$ on désigne par X_i la complétée de la courbe affine plane lisse d'équation $v_i^2 = e_i(u_i^2 + a_iu_i + b_i)(u_i^2 + c_iu_i + d_i)$ où a_i, b_i, c_i, d_i et e_i sont dans k, et où e_i, b_i et d_i sont non nuls ; on munit X_i de l'involution ι_i qui envoie le point de coordonnées (u_i, v_i) sur le point de coordonnées $(u_i, -v_i)$. On suppose que $d_1a_2 - b_1c_2 = 0$, $c_1b_2 - d_2a_1 = 0$, $d_1b_2 - b_1d_2 = 0$, que $d_2c_1^2 - d_1c_2^2 \neq 0$, et que $e_1/e_2 = \alpha^2$ pour un $\alpha \in k$. Alors la surface de Kummer X contient deux courbes k-rationnelles C_1 et C_2 dont les images dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ sont de bidegré $(2,2)$ et rencontrent les $L_i(n)$ comme indiqué sur la figure.*

Dans l'ouvert affine de X^{lisse} d'équation $e_2(x_2^2 + a_2x_2 + b_2)(x_2^2 + c_2x_2 + d_2)y^2 = e_1(x_1^2 + a_1x_1 + b_1)(x_1^2 + c_1x_1 + d_1)$ dans $\mathbf{A}_k^3$, les courbes k-rationnelle C_1 et C_2 admettent respectivement les paramétrisations $z \to (x_1 = \xi_1(z), x_2 = \xi_2(z), y = \xi_3(z))$ et $z \to (x_1 = \xi_1(z), x_2 = \xi_2(z), y = -\xi_3(z))$ où

$$\xi_1(z) = -\frac{d_2z^2 - d_1}{c_2z - c_1}$$
$$\xi_2(z) = -\frac{d_2z^2 - d_1}{z(c_2z - c_1)}$$
$$\xi_3(z) = \alpha z^2.$$

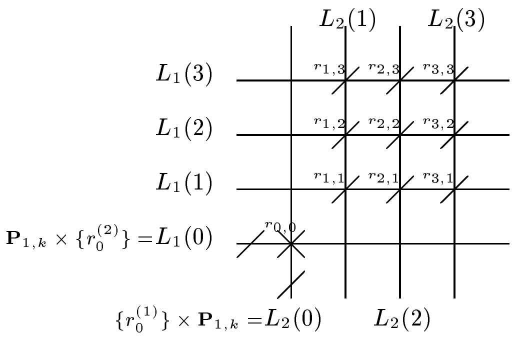
2.3 Exemple 3.

L'exemple de Mestre.

Deux k-courbes elliptiques E_1 et E_2 étant fixées, J.-F. Mestre ([Mes]) montre qu'on peut toujours construire un k-revtement $\mathcal{C}$ de degré 2 de $\mathbf{P}_{1,k}$ (c'est à dire une courbe k-hyperelliptique) et deux k-morphismes φ_1 et φ_2 de $\mathcal{C}$ vers E_1 et E_2 qui vérifient $\varphi_1 \circ \iota_{\mathcal{C}} = -\varphi_1$ et $\varphi_2 \circ \iota_{\mathcal{C}} = -\varphi_2$ où $\iota_{\mathcal{C}}$ est l'involution hyperelliptique de $\mathcal{C}$, et qui sont indépendants. La construction du triplet $(\mathcal{C}, \varphi_1, \varphi_2)$

est essentiellement équivalente à la construction de la courbe k-rationnelle de la surface de Kummer $X = E_1 \times E_2/\{\pm id\}$ qui est l'image de $\mathcal{C}$ par le composé de $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{C} \to E_1 \times E_2$ avec la projection canonique de $E_1 \times E_2$ sur X.

On retrouve le résultat de Mestre en prenant $(X_1, \iota_1) = (E_1, -id)$, $(X_2, \iota_2) = (E_2, -id)$, et en relevant une courbe D de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de bidegré $(3, 3)$ dont les intersections avec les $L_i(n)$ sont décrites par le diagramme suivant :



où, comme plus haut, les obliques représentent les intersections de la courbe D avec les $L_i(n)$. Autrement dit, la courbe D de bidegré $(3, 3)$ passe par les neuf points $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$, $r_{2,3}$, $r_{3,1}$, $r_{3,2}$, et $r_{3,3}$ avec multiplicité 1 et par le point $r_{0,0}$ avec multiplicité 2 ; notons que cela implique que le troisième point d'intersection de D avec $L_1(0)$ (resp. $L_2(0)$) n'est ni $r_{1,0}$, ni $r_{2,0}$, ni $r_{3,0}$ (resp. ni $r_{0,1}$, ni $r_{0,2}$, ni $r_{0,3}$). Comme dans le travail de Mestre nous obtenons comme cela le résultat cherché génériquement ; les cas particuliers restants se traitent après coup.

On vérifie (en reprenant les arguments explicités dans les exemples précédents) que $r_D = 2$ donc, si une telle courbe existe, son image réciproque $\pi^{-1}(D)$ est une k-courbe géométriquement intègre de genre géométrique 0 de X. Notons $p_{1,0}$ et $p_{2,0}$ les points d'intersection de D avec $L_1(0)$ et $L_2(0)$ distincts de $r_{0,0}$; comme dans l'exemple 1, ces points sont des points de D qui sont lisses et rationnels sur k, et au dessus desquels π est ramifié ; leurs images réciproques sont donc deux points rationnels de $\pi^{-1}(D)$, et donc $\pi^{-1}(D)$ est une courbe k-rationnelle. Le genre arithmétique d'une courbe de bidegré $(3, 3)$ étant égal à 4, il faut imposer d'autres singularités que le point double en $r_{0,0}$ pour assurer que le genre géométrique de D est 0. Pour retrouver les équations de [Mes], nous imposons dans la suite que D poss ède un point triple ; cela implique que le genre arithmétique est 0, donc aussi que le genre géométrique est 0 (mais ce n'est pas la seule manière, par exemple imposer trois points doubles ordinaires en plus de $r_{0,0}$ marcherait aussi). Notons qu'alors le point double en $r_{0,0}$ et le point triple sont les seuls points singuliers de D, donc le point triple est un point de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui est rationnel sur k ; de plus il n'est sur aucune des $L_i(n)$ comme on le voit sur la figure représentant l'intersection de D avec les $L_i(n)$.

Pour prouver l'existence d'une courbe k-rationnelle D rencontrant les $L_i(n)$ comme sur la figure,nous choisissons des coordonnées adaptés à la situation.

Pour $i = 1, 2$, on choisit les coordonnées $(u_{i,0} : u_{i:1})$ sur la droite projective de sorte que $r_0^{(i)}$ est le point à l'infini i.e. le point de coordonnées $(0 : 1)$, et que la $i^{ème}$ projection du point triple de D est le point zéro de coordonnées $(1 : 0)$. On prend $u_i = u_{i,1}/u_{i,0}$ comme coordonnée sur l'ouvert U_i défini par $u_{i,0} \neq 0$, et on note $P_i(u_i)$ le polynme unitaire de degré 3 à coefficients dans k dont les racines sont les coordonnées des trois points $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ et $r_3^{(i)}$ dans U_i. Ainsi $v_i^2 = P_i(u_i)$ est un modèle de Weierstrass de E_i ; notons que $P_i(0) \neq 0$ puisque le point triple de D est le point de $U_1 \times U_2$ de coordonnées $(0, 0)$ et n'est sur aucune des $L_i(n)$.

Une courbe D qui rencontre les $L_i(n)$ comme indiqué sur la figure, appartient au système linéaire des courbes de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de bidegré $(3, 3)$ qui passent par les neufs points $r_{n,m}$ pour $n, m = 1, 2, 3$ avec multiplicité 1 et par le point $r_{0,0}$ avec multiplicité 2. Ce système linéaire est de dimension 3 puisque le système linéaire de toutes les courbes de bidegré $(3, 3)$ est de dimension 14 ; il est formé des courbes $D_{(\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)}$ dont la trace dans l'ouvert $U_1 \times U_2$ de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ a pour équation

$$P_1(u_1)(\lambda_0 u_2 + \lambda_1) + P_2(u_2)(\lambda_2 u_1 + \lambda_3) = 0.$$

Pour $i = 1, 2$ posons $P_i(u_i) = u_i^3 + a_i u_i^2 + b_i u_i + c_i$ de sorte que a_i, b_i et c_i sont des éléments de k avec $c_i \neq 0$ puisque $P_i(0) \neq 0$. L'équation de la courbe $D_{(\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)}$ est $(u_1^3 + a_1 u_1^2 + b_1 u_1 + c_1)(\lambda_0 u_2 + \lambda_1) + (u_2^3 + a_2 u_2^2 + b_2 u_2 + c_2)(\lambda_2 u_1 + \lambda_3) = 0$; le point $(u_1, u_2) = (0, 0)$ est un point de multiplicité au moins égale à trois si et seulement si on a $a_1 \lambda_1 = 0$, $b_2 \lambda_3 = 0$, $c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_3 = 0$, $c_1 \lambda_0 + b_2 \lambda_3 = 0$, $b_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0$, et $b_1 \lambda_0 + b_2 \lambda_2 = 0$; comme $a_1 c_2 \neq 0$, on a necessairement $a_1 = a_2 = 0$ et $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3) = (b_2 : c_2 : -b_1 : -c_1)$. L'équation de la trace de $D_{(b_2:c_2:-b_1:-c_1)}$ sur $U_1 \times U_2$ est $b_2 u_1^3 u_2 - b_1 u_1 u_2^3 + c_2 u_1^3 - c_1 u_2^3$. Le point $r_{0,0} = (\infty, \infty)$ est un point double sur cette courbe si l'un au moins des coefficients b_1 ou b_2 est non nul. Enfin, si b_1 ou b_2 est non nul, on voit en tenant compte du fait que c_1 et c_2 sont non nuls, que $D_{(b_2:c_2:-b_1:-c_1)}$ est géometriquement intègre si et seulement si $b_1^3 c_2^2 - b_2^3 c_1^2 \neq 0$. Sous ces hypothèses, on calcule et on paramétrise facilement l'image réciproque de $D_{(b_2:c_2:-b_1:-c_1)}$ dans X et on trouve :

Proposition 2.3.1 *Soient E_1 et E_2 deux k-courbes elliptiques qui admettent des modèles de Weierstrass $v_1^2 = u_1^3 + b_1 u_1 + c_1$ et $v_2^2 = u_2^3 + b_2 u_2 + c_2$. On suppose c_1 et c_2 non nuls, b_1 ou b_2 non nul, et $b_1^3 c_2^2 - b_2^3 c_1^2 \neq 0$. Alors la surface de Kummer $X = E_1 \times E_2/(\pm id)$ contient une courbe k-rationnelle C dont l'image dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est de bidegré $(3, 3)$ et rencontre les $L_i(n)$ comme indiquée sur la figure.*

Dans l'ouvert affine de X^{lisse} d'équation $(x_2^3 + b_2 x_2 + c_2)y^2 = (x_1^3 + b_1 x_1 + c_1)$ dans $\mathbf{A}_k^3$ la courbe C admet la paramétrisation $z \to (x_1 = \frac{c_2 z^6 - c_1}{b_1 - b_2 z^4}, x_2 = \frac{c_2 z^6 - c_1}{z^2(b_1 - b_2 z^4)}, y = z^3)$.

On reconnait bien dans cette proposition les formules de Mestre. Les cas exclus dans la proposition précédente se traitent par une étude cas par cas.

Traitons par exemple le cas suivant : on conserve les hypothèses c_1 et c_2 non nuls, b_1 ou b_2 non nul, mais on suppose $b_1^3c_2^2-b_2^3c_1^2=0$. On a alors b_1 et b_2 non nuls et on pose $\lambda = b_1c_2/b_2c_1$ de sorte que $b_1=\lambda^2 b_2$ et $c_2=\lambda^3c_1$ (l'hypothèse est donc que les deux courbes elliptiques E_1 et E_2 sont isomorphes sur le corps $k(\sqrt{\lambda})$ et que leurs invariants modulaires sont différents de 0 et 1728). L'équation de la trace de $D_{(b_2:c_2:-b_1:-c_1)}$ dans $U_1\times U_2$ devient $(\lambda u_1-u_2)(b_1\lambda u_1^2u_2+b_1u_1u_2^2+c_1\lambda^2u_1^2+c_1\lambda u_1u_2+c_1u_2^2)$; ainsi $D_{(b_2:c_2:-b_1:-c_1)}$ est la réunion d'une courbe de bidegré $(1,1)$ et d'une courbe de bidegré $(2,2)$; on vérifie que l'image réciproque de la courbe de bidegré $(2,2)$ est une courbe k-rationnelle sur X qui est non triviale, ce qui règle ce cas. Dans l'ouvert affine de X^{lisse} d'équation $(x_2^3+\lambda^2b_1x_2+\lambda^3c_1)y^2=(x_1^3+b_1x_1+c_1)$ dans $\mathbf{A}_k^3$ cette courbe k-rationnelle admet la paramétrisation $z\to(x_1=\frac{-c_1(\lambda^2z^4+\lambda z^2+1)}{b_1(\lambda z^2+1)}, x_2=\frac{-c_1(\lambda^2z^4+\lambda z^2+1)}{b_1z^2(\lambda z^2+1)}, y=z^2)$. Notons que l'image réciproque de la courbe de bidegré $(1,1)$ se calcule comme on l'a fait dans l'exemple 1 ; elle se compose de deux composantes $\overline{k}$-rationnelles conjuguées sur $k(\sqrt{\lambda})$ et donc ne permet de construire une courbe k-rationnelle sur X que dans le cas particulier où λ est un carré dans k, i.e. lorsque E_1 et E_2 sont isomorphes sur k.

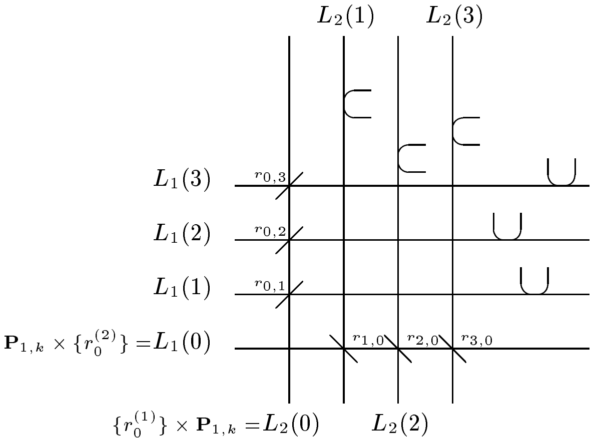
Les cas restants sont essentiellement ceux pour lesquels les invariants modulaires des courbes E_1 et E_2 sont 0 ou 1728. Les choix de coordonnées que nous avons fait ne sont alors pas adaptés à la situation (essentiellement on ne peut plus demander dans ces cas que le point triple soit le point de coordonnées $((0:1),(0:1)$ dans $\mathbf{P}_{1,k}\times\mathbf{P}_{1,k})$. Les changements à faire pour traiter ces cas ne posent pas de difficultés.

2.4 Exemple 4.

Courbes k-rationnelles associées aux courbes de genre 2.

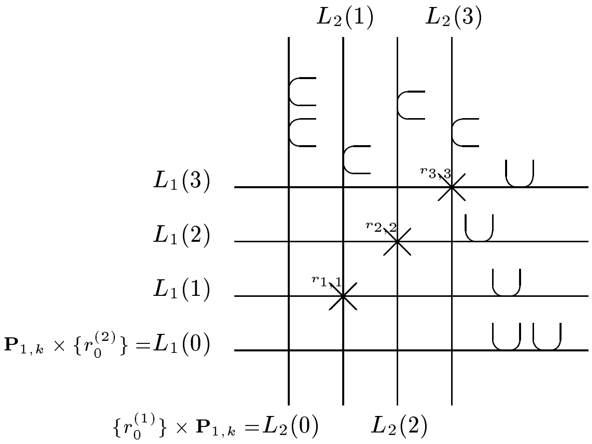
0n suppose encore que $(X_1,\iota_1)=(E_1,-id)$ et $(X_2,\iota_2)=(E_2,-id)$ o E_1 et E_2 sont deux k-courbes elliptiques. On fixe un entier naturel n.

Si l'entier n est impair et strictement plus grand que 1, on considère les courbes k-rationnelles D de $\mathbf{P}_{1,k}\times\mathbf{P}_{1,k}$ de bidegré (n,n) qui rencontrent les $L_i(n)$ de la manière suivante : pour $n=1,2,3$ (resp. $m=1,2,3$) la courbe D rencontre la droite $L_1(n)$ (resp. $L_2(m)$) en le point $r_{0,n}$ (resp. $r_{m,0}$) avec multiplicité 1, et en $(n-1)/2$ autres points qui sont des points lisses de D, qui ne sont situés sur aucune des $L_2(m)$ (resp. $L_1(n)$), avec multiplicité 2 ; la courbe D rencontre $L_1(0)$ (resp. $L_2(0)$) en les trois points $r_{1,0}$, $r_{2,0}$ et $r_{3,0}$ (resp. $r_{0,1}$, $r_{0,2}$ et $r_{0,3}$) avec multiplicité 1 , et en $(n-3)/2$ autres points qui sont des points lisses de D, qui ne sont situés sur aucune des $L_2(m)$ (resp. $L_1(n)$), avec multiplicité 2. Par exemple, pour $n=3$, cette situation se représente par la figure suivante :



o les intersections de D avec les $L_i(n)$ sont représentées par des obliques lorsqu'elles sont de multiplicité 1 et par des ovales lorsqu'elles sont de multiplicité 2. Une branche d'une courbe D qui vérifie ces conditions rencontre soit deux des droites $L_i(n)$ avec multiplicité 1, soit une des $L_i(n)$ avec multiplicité 2 de sorte que $r_D = 0$. L'image réciproque $\pi^{-1}(D)$ de D sur X est donc formée de deux composantes $\overline{k}$-rationnelles. Supposons trouvée une telle courbe D, et notons φ une paramétrisation de D, i.e. un k-morphisme $\varphi : \mathbf{P}_{1,k} \to \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ dont l'image est D ; notons enfin C_1 et C_2 les deux composantes géométriques de $\pi^{-1}(D)$. Choisissons des coordonnées $(z_0 : z_1)$ sur la droite projective source de φ, posons $z = z_1/z_0$, et notons $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, $z_{3,0}$, $z_{0,1}$, $z_{2,0}$ et $z_{0,3}$ les paramtres des six points $r_{1,0}, \dots, r_{0,3}$, c'est à dire les six valeurs telles que $\varphi(z_{1,0}) = r_{1,0}, \dots, \varphi(z_{0,3}) = r_{0,3}$. Un calcul facile montre que, pour $i = 1, 2$, l'image réciproque $\mathcal{C}_i = \theta^{-1}(C_i)$ de C_i par le morphisme canonique $\theta : E_1 \times E_2 \to X$ est une courbe de genre 2 sur $E_1 \times E_2$ qui est $\overline{k}$-birationnellement équivalentes au revtement de degré 2 de $\mathbf{P}_{1,k}$ ramifié en les six points $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, $z_{3,0}$, $z_{0,1}$, $z_{2,0}$ et $z_{0,3}$; si C_1 et C_2 sont k-rationnelles, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont définies sur k et sont k-birationnellement équivalentes au revtement de degré 2 de $\mathbf{P}_{1,k}$ ramifié en ces six points. Le k-isomorphisme $(-id_{E_1}) \times id_{E_2}$ de $E_1 \times E_2$ échange ces deux courbes.

Si l'entier n est pair, on considère les courbes k-rationnelles D de $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ de bidegré (n, n) qui rencontrent les $L_i(n)$ de la manière suivante : la courbe D rencontre $L_1(0)$ (resp. $L_2(0)$) en $n/2$ points qui sont des points lisses de D, qui ne sont situés sur aucune des $L_2(m)$ (resp. $L_1(n)$), avec multiplicité 2 ; les trois points $r_{1,1}$, $r_{2,2}$ et $r_{3,3}$ sont trois points doubles ordinaires de D et chacune des six branches de D centrées en l'un de ces trois points rencontre les $L_i(n)$ passant par ce point avec multiplicité 1 ; enfin, pour $m = 1, 2, 3$ (resp. $n = 1, 2, 3$) la courbe D rencontre la droite $L_2(m)$ (resp. $L_1(n)$) en $(n-2)/2$ points qui sont des points lisses de D, qui ne sont situés sur aucune des $L_1(n)$ (resp. $L_2(m)$), avec multiplicité 2, et en le point double ordinaire $r_{m,m}$ (resp. $r_{n,n}$) comme on vient de le décrire. Pour $n = 4$, cette situation se représente par la figure suivante :



o, comme plus haut, les obliques et les ovales représentent respectivement les branches de D qui coupent les $L_i(n)$ avec multiplicités 1 et 2 ; on vérifie immédiatement que, dans ce cas encore, on a $r_D = 0$. Supposons trouvée une telle courbe D, et notons φ une paramétrisation de D, i.e. un k-morphisme $\varphi : \mathbf{P}_{1,k} \to \mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ dont l'image est D ; notons enfin C_1 et C_2 les deux composantes géométriques de $\pi^{-1}(D)$. Choisissons des coordonnées $(z_0 : z_1)$ sur la droite projective source de φ, posons $z = z_1/z_0$ et, pour $n = 1, 2, 3$, notons $z_{n,1}$, $z_{n,2}$ les deux paramtres du point double ordinaire $r_{n,n}$ de D, c'est à dire les deux valeurs telles que $\varphi(z_{n,1}) = \varphi(z_{n,2}) = r_{n,n}$. Un calcul facile montre que, pour $i = 1, 2$, l'image réciproque $\mathcal{C}_i = \theta^{-1}(C_i)$ de C_i par le morphisme canonique $\theta : E_1 \times E_2 \to X$ est une courbe de genre 2 sur $E_1 \times E_2$ qui est $\overline{k}$-birationnellement équivalente au revtement de degré 2 de $\mathbf{P}_{1,k}$ ramifié en les six points $z_{1,1}$, $z_{1,2}$, $z_{2,1}$, $z_{2,2}$, $z_{3,1}$ et $z_{3,2}$; si C_1 et C_2 sont k-rationnelles, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont définies sur k et sont k-birationnellement équivalentes au revtement de degré 2 de $\mathbf{P}_{1,k}$ ramifié en ces six points. Le k-isomorphisme $(-id_{E_1}) \times id_{E_2}$ de $E_1 \times E_2$ échange ces deux courbes.

Chaque fois que l'on trouve un courbe k-rationnelle D dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ qui vérifie les conditions que l'on vient de décrire, on note $\mathcal{C}$ l'une des deux courbes $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$. On vérifie immédiatement que les deux projections q_1 et q_2 du produit $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2 induisent deux morphismes de degré n de $\mathcal{C}$ sur E_1 et E_2. On montre dans [Sat] que toute courbe k-hyperelliptique de genre 2 dont la jacobienne est k-isogène à un produit de k-courbes elliptiques est obtenue de cette manière avec un bon choix de n.

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, lorsque le corps k est le corps de complexes, la recherche des courbes hyperelliptiques dont la jacobienne contient des courbes elliptiques est le problème classique de la recherche d'intégrales hyperelliptiques qui se réduisent à des intégrales elliptiques. Dans le cas des intégrales hyperelliptiques de genre 2 qui nous interessent dans cet exemple, c'est un execice amusant de retrouver les formules classiques que l'on trouve par exemple dans [Bol], dans le chapitre XI de [Kra], ou encore dans [Pic] en construisant les courbes D correspondantes. Terminons ce travail en revenant au cas où le corps de base est quelconque, et en signalant deux travaux qui, au point de vue près, traitent des cas particuliers de la situation que l'on décrit ici. Tout d'abord, les calculs du §6 de [Kuh] s'interprtent immédiatement comme l'explicitation de la paramétrisation de φ dans le cas $n = 3$. D'autre part, notons $E_1[n]$ et $E_2[n]$ les $Gal(\overline{k}/k)$-modules galoisiens des points de E_1 et E_2 qui sont tués par n. On sait ([F-K] ou [Sat] par exemple) que les courbes k-hyperelliptiques de genre 2 tracées sur $E_1 \times E_2$ dont l'image dans $\mathbf{P}_{1,k} \times \mathbf{P}_{1,k}$ est une courbe k-rationnelle de type (n, n) qui coupent les $L_i(n)$ comme indiqué plus haut correspondent aux $Gal(\overline{k}/k)$-isomorphismes de $E_1[n]$ sur $E_2[n]$ qui sont anti-symplectique (pour le pairing de Weil). Ainsi, les calculs de [R-S] donnent des exemples de la situation décrite ici avec $n = 3$ et $n = 5$. Notons que les calculs présentés dans les deux travaux que nous venons de citer nécessitent l'emploi d'un logiciel de calcul formel. Nous avons recalculé ces exemples sans difficulté dans le cadre exposé ici en utilisant Maple.

.

References

[B-M] Batyrev V.-V., Manin Yu. I., *Sur le nombre de points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques*, Math. Ann., **286**, (1990), 27-43.

[Bol] Bolza 0., *Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine transformation vierten Grades*, Math. Ann., **XXVIII**, (1886), 447-456.

[F-K] Frey G., Kani E., *Curves of genus 2 covering elliptic curves*, Arithmetic Algebraic Geometry, Prog. in Math. **89**, Birkhauser, (1991), 153-175.

[Jac] Jacobi C.G., *Anzeige von Legendre, Théorie des fonctions elliptiques, troisième supplément (1832)*, Jour. für die Reine und Angew. Math., Bd **8**, reproduit dans les Gesammelte Werke, Bd 1, Berlin (1881).

[Kra] Krazer A.,*Lehrbuch der Thetafunctionen*, Teubner, Leipzig (1903) (reédité par Chelsea, New-York (1970)).

[Kuh] Kuhn R.-M., *Curves of genus 2 with split Jacobian*, Trans. of the Amer. Math. Society, Vol. **307**, (1988), 41-49.

[Leg] Legendre A.-M., *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, $3^{ième}$ supplément, (1832).

[M-S] Maïer N., Satgé Ph., *Fibrations en courbes de genre 1 sur la surface de Kummer associée au produit de deux courbes de genre 1*, prépublications de l'Université de Caen.

[McK] McKinnon D., *Counting rational points of bounded height on K3 surfaces*, à paraitre au J. Number Theory, Vol. **89**,(2000).

[Mes] Mestre, J.-F., *Rang de courbes elliptiques d'invariant donné*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **314**, (1992), 919-922.

[Pic] Picard E., *Sur quelques exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques*, C.R.,**93**, Séance du 16 décembre 1881, 1126-11288; *Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques*, C.R.,**94**, Séance du 26 juin 1882, 1704-1707 ; reproduits dans le volume III des oeuvres complètes, Editions du CNRS, (1980).

[R-S] Rubin K., Silverberg A., *Families of elliptic curves with constant mod. p representations*, Proceedings of the conference on elliptic curves and modular forms, Hong-Kong 1993, Cambridge University Press (1995).

[Sat] Satgé Ph., *Le morphisme complémentaire d'un morphisme d'une courbe de genre 2 vers une courbe de genre 1*, soumis aux actes des journées revêtements de St Etienne (Mars 2000).