

20

סמסטר ב' תשנ"ג 5.7.73

מחמטיקה בדידה
פרופ' מ. טרסי

משך הבחינה שלוש שעות. לא תהיה חוספת זמן! מותר השמוש בכל חומר עזר. כל שצטט וחוצאה שהוכחו בכיתה או בחרגיל, או בחומר מודפס שברשותך, ניתן לצטט לך הונחה. יש להשיב על כל השאלות. הנקודות לסעיף בודד בשאלה 20 נקודות, שני סעיפים 30 ולשלושה 34. סדר הסעיפים אינו מחייב, אך הם ערוכים בכל אלה הן הקל אל הכבד ומומלץ לנסות לפתור אותם לפי הסדר.

1. הוכח או הפרך כל אחד מהטעונים הבאים:

- א. תהינה A ו-B שתי קבוצות לא ריקות. קיימת פונקציה חד-חד ערכית מ-A ל-B אם ורק אם קיימות פונקציה מ-B על A. כאמור.
- ב. תהינה S קבוצה כל היחסים הסימטריים על קבוצה אינסופית בת מנייה A. קיימת פונקציה חד-חד ערכית מ-S לקבוצת המספרים הממשיים R.
- ג. תהינה S מוגדרת כמו בסעיף ב'. קיימת פונקציה מ-S על R.

2.

א. הסידרה $\{a_k\}$ מוגדרת על ידי $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{k+2} = a_{k+1} + 3a_k$

חשב את הפונקציה היוצרת $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ואת הגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

הצג לגבול בטוי אריתמטי מדויק (לא קרוב עשרוני) ולמקור ציפה ה"א סלוצקי

ב. תהינה $\{q^k\}$ סדרה גאומטרית (q קבוע). ו $\{s_k = \sum_{i=0}^k q^i\}$ סדרת הסכום שלה. הצג בטוי סגור לפונקציה היוצרת של סדרת הסכום $F_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$ ופתח ממנו נוסחה לאבר הכללי s_k .

ג. חשב את הפונקציה היוצרת הרגילה $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

כאשר a_k הוא מספר המחרוזות הבינריות באורך k המסתיימות ב-00. ואינו מכילות את המחרוזת 101 (ברציפות, כמו למשל ב-11010011).

3. הוכח או הפרך כל אחד מהטעונים הבאים:

א. יהיה G גרף מישורי ו-H תת-גרף של G בעל $K, 2 < K$, קדקדים. ב-H לכל היותר $3K-6$ קשתות.

ב. אם G גרף דו-צדדי ובכל תת גרף שלו בעל $K, 3 < K$, קדקדים יש לכל היותר $2K-4$ קשתות. אזי G מישורי.

יהיו $G=(V,E)$ ו- $G'=(V,E')$ שני גרפים ללא מעגלים על אותה קבוצת קדקדים V , אם $|E| > |E'|$ אזי קיימת קשת ב-E שאם נוסיף אותה ל- E' עדיין יהיה הגרף המוקבל מ- G' חסר מעגלים. רמז: התבונן ברכיבי הקשירות של G' . כיצד מחולקות ביניהם הקשתות של G ?

74