7/2/95

סמסטר ב'
מועד א'

מבחן - כרסי, מיכלס, אברון

משפט:

$$\sim[\exists x\in Q\ \forall y\in Q((y^2<2 \Rightarrow x>y) \wedge \forall \varepsilon>0\ \exists z\in Q(z^2<2 \wedge z>x-\varepsilon)))$$

פסוק אמיתי.

הוכחה:

$$(\forall x\in Q, \exists y\in Q, ((y^2<2 \wedge x\le y) \vee (\exists \varepsilon>0, \forall z\in Q, (z^2\ge 2 \vee z\le x-\varepsilon))))$$

מאחר שהשלילה הפסוק שיקרי $\sqrt{2}<x \wedge -\sqrt{2}<y<\sqrt{2}$
זאת. קיים x כזה.

$z>x-\varepsilon \wedge -\sqrt{2}<z<\sqrt{2}$

שיקרי. לא ניתן כי z נמצא
בתחום של y בלבד
וכמו כן y<x ולכן $x-\varepsilon<z$

ולכן: $F = T \wedge F$ ולכן לא השלילה
הפסוק שיקרי כאשר נשלול הפסוק
יהיה אמיתי.

(2)

$$\{f\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid x\notin Q \Rightarrow f(x)=x\}$$

$$x\in \mathbb{R}\setminus Q \Rightarrow f(x)=x$$

35

כי קיימת פונקציה הפיכה

$F: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{Q}$

קבוצת הפונקציות $f(x)=x$ $\forall x\in \mathbb{R}\setminus Q$

[illegible]

9)

7.2.95
סמסטר א' [illegible]
מועד [illegible]

4-

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \text{לא ידוע} & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

עבור $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ידוע כי ערך הפונקציה $= x$.
עבור $x\in\mathbb{Q}$ לא ידוע מה ערך הפונקציה.

הבעיה שקולה לבעיה של כמה פונקציות קיימות מ-$\mathbb{Q}$ לתוך $\mathbb{R}$ (כיוון שכל פונקציה כזו ניתן להתאים לפונקציה f הנתונה)
הוכחתי בניחה.

ולכן עוצמת $F = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}|$

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = C$$

3)

$$A=\{a,\emptyset,\{a\}\}$$

$$P(A)=2^3=8$$

$$P(P(A))=2^{2^3}=2^8$$

$$P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{a,\emptyset\},\{a,\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\},\{a,\emptyset,\{a\}\}\}$$

3ב)

$$P(P(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}$$

אי אפשר לחשב את $P(P(A))$ כי 2^8 איברים אבל מותר לבחור איך יראה החיתוך:

$$P(A)\cap P(P(A))=4 : \{\emptyset,\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}$$

[illegible]

מק

7.2.95 — 5 —

$S\subseteq A\times P(A)$

S הוא יחס מ-A ל-P(A)
תחום טווח.

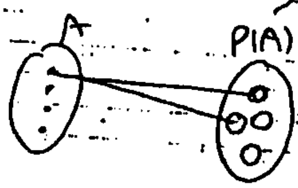
$(\exists a\in A \mid |\{T\subseteq A \mid (a,T)\in S\}|>1)\ \lor$

קיים איבר בתחום כך שהיחס S מתקיים
עבורו עם יותר מקבוצה אחת בטווח

$(\exists T\subseteq A\ \{a\in A \mid (a,T)\in S\}=\emptyset)$

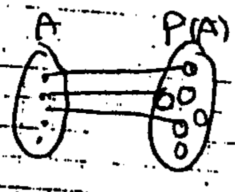
קיימת תת קבוצה בטווח כך שאיננה מתקיימת
ביחס S עם אף איבר בתחום.
אין איבר בתחום שמקיים איתה את יחס S.

אם קיים איבר בתחום כך שיחס S מתקיים עבורו עם יותר
מקבוצה אחת בטווח אזי נראה כך



ואז היחס לא יהיה חד ערכי.
~~ותהיה יותר מקבוצה אחת~~ -- $(a_0,T)\in S$
ואז הביטוי הראשון יהיה T וכל המשפט
יהיה T כיוון ש-V (or) הוא T כאשר אחד מהאיברים T.

ג) אם הביטוי הראשון יהיה F אומר שהיחס הוא חח"ע, ואז אומר
כי A שמקיים את היחס (לא חייב להיות מלא) יש רק תמונה אחת
בטווח.



גם במקרה שהיחס הוא מלא וחח"ע
אומר פונקציה גם אז התמונה נוגעת
לא קיימת קבוצה בטווח שאין לה מקור ישיר.
I
עפ"י משפט קנטור ש- $|A|\neq|P(A)|$

37

ולכן הביטוי השני יהיה T
מכיוון שכל מספר אחת הביטויים יהיו T גם המשפט כולו

92

7.2.95
סמסטר א', מועד ג'

-6-

שלילת את המשפט.

$$\left(\forall a\in A \ \left|\{T\subseteq A \mid (a,T)\in S\}\right| \le 1\right) \wedge$$

לכל איבר בתחום A קיימת תת קבוצה (T∈P(A)) יחידה
או שאין קיימת תת קבוצה כזו בכלל.

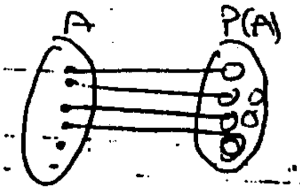
$$\left(\forall T\subseteq A \ \{a\in A \mid (a,T)\in S\} \neq \emptyset\right)$$

לכל תת קבוצה T⊆A, קיים איבר a שמקיים איתה
את יחס S.

אין קב' T שלא כמוס.

כדי שהמשפט יהיה אמת שני הביטויים צריכים להתקיים.

הביטוי הראשון אומר שלכל איבר A יש מקסימום קב' T 1 בשוות
כלומר היחס הוא חח"ע, (לא חייב להיות מלא, לא מוגדר לכל איברי
a∈A מקיימת את היחס).



והביטוי השני - אומר שלכל תת קב' T∈P(A) יש מקור a
שמקיים איתה את היחס, כלומר היחס הוא על, אבל לא יתכן
מאחר שע"פ קנטור
$|A| < |P(A)|$
ולכן היחס לא יהיה על.

שלילת הטענה אינה חוקית ולכן הטענה המקורית תמיד
חוקית.
מש"ל.

38

96

7.2.95

[illegible]

-7-

$$a_n = C n^2 3^n$$ פתרון פרטי.

$$C \cdot n^2 3^n = 6(C(n-1)^2 3^{n-1}) - 9(C(n-2)^2 3^{n-2}) + 4 \cdot 3^n = 0$$

$$C \cdot n^2 \cdot 3^n = 6(C(n^2-2n+1) \cdot 3^{n-1}) - 9(C(n^2-4n+4) \cdot 3^{n-2}) + 4 \cdot 3^n = C$$

$$C \cdot n^2 \cdot 3^n = 6C3^{n-1}n^2 - 12C3^{n-1}n + 6C3^{n-1}$$
$$-9C3^{n-2}n^2 + 36nC3^{n-2} - 36C3^{n-2} + 4 \cdot 3^n = 0$$

$$Cn^2 3^n = 2C3^n n^2 - \cancel{4C3^n n} + \cancel{2C3^n} - C3^n n^2 + \cancel{4nC3^n} - 4C3^n + 4 3^n$$

$$n^2(C3^n - 2C3^n + \cancel{C3^n}) + 2C\cancel{3^n} - 4 \cdot \cancel{3^n} = 0$$

$$2C - 4 = 0$$
$$2C = 4$$
$$C = 2$$

$$a_n^p = 2n^2 3^n$$ פתרון כללי:

$$a_n = a_n^p + a_n^h = A \cdot 3^n + Bn3^n + 2n^2 3^n$$

$$a_0 = a_1 = 0$$

$$a_0 = 0 = A \Rightarrow A = 0$$

$$a_1 = 0 = A \cdot 3 + B \cdot 3 + 2 \cdot 3$$
$$3B + 6 = 0$$
$$3B = -6$$
$$B = -2$$

(39) $$\underline{a_n = -2n3^n + 2n^2 3^n}$$

97

7.2.95
סמסטר א'
מועד ב'

$$a_k = \binom{0+3}{4} + \binom{1+3}{4} + \binom{2+3}{4} + \dots + \binom{k+3}{4}$$

צג פונקציה יוצרת:

$$a_0 = \binom{3}{4} = 0$$

$$a_1 = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} = 1$$

$$a_2 = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} = 6$$

$$a_3 = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = 6 + \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

$$a_{k-1} = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \dots \binom{k-1+3}{4}$$

$$a_k = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{k-1+3}{4} + \binom{k+3}{4}$$

$$a_{k+1} = \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \dots + \binom{k+3}{4} + \binom{k+1+3}{4}$$

$$a_{k+1} - a_k = \binom{k+4}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

$$\frac{F(x) - a_0}{x} - F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

$$F(x) - a_0 - xF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+1}$$

$$F(x) = (1-x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

40

$$F(x) = \frac{x}{1-x} \sum^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k = \frac{x}{\dots}$$

98

7.2.95 -9- [redacted]

באורך n מעל $\{1,2,3\}$

$\frac{2}{3}\ \boxed{a_{n-1}}$

$1\quad \frac{2}{3}\ \boxed{a_{n-2}}$

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$a_1 = 3$

$a_2 = 3^2 = 9-1 = 8$

3,2
2,3
1,1
1,2
2,1
3,1

$8 = 6 + 2a_0$

$2 = 2a_0$

$a_0 = 1$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2+\sqrt{12}}{2},\ \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

$$1 = a_0 = A + B \qquad A = 1 - B$$

$$3 = a_1 = A\left(\frac{2+\sqrt{12}}{2}\right) + B\left(\frac{2-\sqrt{12}}{2}\right)$$

$$3 = (1-B)\left(\frac{2+\sqrt{12}}{2}\right) + B\left(\frac{2-\sqrt{12}}{2}\right)$$

$$3 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} - B\left(\frac{2+\sqrt{12}}{2}\right) + B\left(\frac{2-\sqrt{12}}{2}\right)$$

$$3 - \frac{2+\sqrt{12}}{2} = B\left(\frac{2-\sqrt{12}}{2} - \frac{2+\sqrt{12}}{2}\right)$$

$$\frac{4+\sqrt{12}}{2} = B(\sqrt{12}) \qquad 4-\sqrt{12} = B$$

$$A = 1 - 4 + \sqrt{12} = -3 + \sqrt{12}$$

$$a_n = (-3+\sqrt{12})\left(\frac{2+\sqrt{12}}{2}\right)^n + (4-\sqrt{12})\left(\frac{2-\sqrt{12}}{2}\right)^n$$

$$(-3+\sqrt{12})(1+\sqrt{3})^n + (4-\sqrt{12})(1-\sqrt{3})^n$$

41

7.2.95 10

ד' 200 נק'

ת.ה' מ $a_0=a_1=0$ a_n מוגדרת באמצעות

$n\geq 2$ לכל

$$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}+4\cdot 3^n$$

מצא ביטוי סגור ל a_n

הומוגנית:

$$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}$$

$$x^2-6x+9=0$$

$$\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot 9}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2}=3$$

$$a_n=A\alpha^n+B\alpha^n=A\cdot 3^n+B\cdot n\cdot 3^n$$

$$a_n=C\cdot n^2\cdot 3^n$$

$$C\cdot n^2\cdot 3^n=6\cdot C(n-1)^2\cdot 3^{n-1}-9\cdot C(n-2)^2\cdot 3^{(n-2)}+4\cdot 3^n$$

$$C\cdot n^2\cdot 3^n=6C(n^2-2n+1)\cdot 3^{n-1}-9C(n^2-4n-4)\cdot 3^{n-2}+4\cdot 3^n$$

$$C\cdot n^2=\frac{6}{3}C(n^2-2n+1)-\frac{9}{9}C(n^2-4n+n)+4$$

$$\cancel{Cn^2}=\cancel{2Cn^2}-\cancel{4Cn}+2C-\cancel{Cn^2}+\cancel{4Cn}-\cancel{Cn}+4$$

$$n^2\cancel{(C-2C+C)}=n(\cancel{-4C}+\cancel{4C}-C)+2C+4$$

$$-Cn$$

$$2C+4=0$$

$$2C=-4$$

$$C=-2 \qquad a_n=-2n^2 3^n$$

$$\boxed{a_n=-2\cdot n 3^n+2n^2 3^n}$$

(42)

$$a_n=2n^2 3^n$$

$$0=a_1=A3+B\cdot 3\cdot 6$$

כמה תמורות של המספרים: 1,2,3,4,5,6,7,8 יש כך שאף אחד
7.2.95
מהמספרים 1,2,3,4 לא נמצא במקומו הטבעי?

א

$N_0 = \left| A \setminus \bigcup_{R_i \in S} R_i \right|$

[redacted]

...ין ההכלה
וההפרדה

$N_0 = \sum_{P \subseteq S} N_P (-1)^{|P|}$

S - תכונות כאלה מוספות תת קבוצות ה-A

$N_\phi = |A|$

$S = \{R_i\}_{i=1,\dots}$

$P \subseteq S$

$N_\phi = 8!$

$N_0 = N_\phi - N_{\{R_1\}} + N_{\{R_2\}} - N_{\{R_3\}} + N_{\{R_4\}}$

$\{R_1\}$ - מספר אחד במקומו והשאר לא

$\{R_2\}$ - 2 מספרים במקום והאחרים לא

$\{R_3\}$ - 3 מספרים במקומם והאחרים לא

$\{R_4\}$ - 4 מספרים במקומם

$N_0 = 8! - \binom{4}{1} 7! + \binom{4}{2} 6! - \binom{4}{3} 5! + \binom{4}{4} 4!$

7.2.95 — 12 —

מטלה 3/1

$$a_k=\binom{0+3}{4}+\binom{1+3}{4}+\binom{2+3}{4}+\dots+\binom{k+3}{4}$$

$$a_0=\binom{0+3}{4}$$

$$a_1=\binom{0+3}{4}+\binom{1+3}{4}$$

$$a_2=\binom{0+3}{4}+\binom{1+3}{4}+\binom{2+3}{4}$$

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}\binom{i+3}{4}$$

הסדרה הרצויה היא סדרת הסכומים של הסדרה b_k

המוגדרת כך: $A(x)=\frac{1}{1-x}B(x)$

$$b_0=\binom{0+3}{4}$$

$$b_1=\binom{1+3}{4} \qquad \binom{3}{4},\binom{4}{4},\binom{5}{4},\binom{6}{4},\binom{7}{4},\binom{8}{4}$$

$$b_2=\binom{2+3}{4} \qquad 0,1,5,15,35,70\dots$$

$$b_i=\binom{i+3}{4} \qquad 0,1,4,10,20,35 \quad \text{הפרשים I}$$

$$0,1,3,6,10,15 \quad \text{הפרשים II}$$

$$0,1,2,3,4,5\dots \quad \text{הפרשים III}$$

$$0,1,1,1,1,1,\dots \quad \text{הפרשים IV}$$

$$0,1,0,0,0,0\dots \quad \text{הפרשים V}$$

44

$$b_k=\frac{x}{(1-x)^5} \qquad a_k=\sum_{i=1}^{\infty}b_k \Rightarrow a_k=\frac{x}{(1-x)^6}$$

$$b_i=\binom{i+3}{4} \qquad A(x)=\frac{1}{1-x}B(x)$$

דרך אחרת:

$$B(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+3}{4}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i=x\sum_{i=1}^{\infty}\binom{i-1+4}{4}x^{i-1}$$

(8) נתונים 2 גרפים (V,E_1) ו-(V,E_2) בעלי אותם קב' קודקודים V.
איחוד שני הגרפים הוא $G=(V,E)$ שהקשתות שלו הם $E=E_1 \cup E_2$
צ"ל כי ב-G קודקוד שדרגתו אינה קטנה מ-3.

יהיה מס' הקודקודים $V = n$.
נניח בשלילה כי דרגתו של כל קודקוד היא לפחות 4.
⇐ דרגת כל הקודקודים בגרף G היא לפחות 4n.

בין כל 2 קודקודים עוברת קשת אחת לכן יש לפחות 2n קשתות.
אבל $G_1 =$ עץ ← n-1 קשתות
וכן $G_2 =$ עץ ← n-1 קשתות
נקבל יש ב-G מקסימום 2n-2 קשתות
ולכן סתירה.

45

14 [redacted]

7.2.95
מטלה א'
[illegible]

~~$\{\emptyset,\{a\}\}$~~

(3)

$P(A) \cap P(P(A))$

$2^3 = P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{a,\emptyset\}, \{a,\{a\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{a,\emptyset,\{a\}\}\}$

$\boxed{|P(P(A))|} = 2^8$

הוכחנו בכיתה:

$P(A) \cap P(P(A)) = P(A \cap P(A))$

ולכן אפשר לבדוק את

$A \cap P(A) = \{\emptyset,\{a\}\}$ $\quad P(\{\emptyset,\{a\}\})$

$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}\}$

או: ב- $P(P(A))$ יהיו כל האיברים ב- $P(A)$ שהם גם קב' וגם איבר

$\{\emptyset, \{\{a\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{\emptyset\}\}$

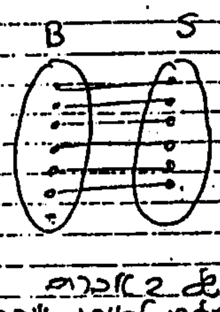
(4) ~~[illegible]~~

~~קבוצת [illegible]~~

~~[illegible] B ~~ של S.

(46)

$|B| = 17$



קבוצת החזקות

$P(4) = 2^4 = 16$

$|S| = 16$

מאז לפצל 17 כפונים ב- 16 תאים
כאשר בכל תא חייב להיות איבר אחד
לפחות.

$\binom{17}{2} \cdot 16!$

נתנו 16
איברים לסדר
כאשר יש חשיבות
לסדר ולכן 16! אפשרויות

בחירת זוג של 2 איברים
מתוך ה-17 שיפלו לאותו איבר
ב- B
(כי אומרים שיכנסו לאותו תא)