סמסטר ג תשנ"ה
27.6.95

תשובה [illegible]

משך הבחינה 3 שעות
חומר עזר: השימוש בכל חומר כתוב מותר
הצלחה!

חלק א' - תורת הקבוצות

ענה על 3 מתוך השאלות הבאות:

1. חשב את עוצמת הקבוצה: $\{f \mid f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \wedge (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \rightarrow f(x)=x^2+x+1)\}$

2. נגדיר יחס R על הממשיים (בהצגה עשרונית אינסופית):
xRy אם"ם ש הספרות מימין לנקודה העשרונית של y הן פרמוטציה של ש הספרות מימין לנקודה העשרונית של x.
א. הראה כי R הוא יחס שקילות.
ב. מצא את עוצמת קבוצת המנה. הסבר.

3. נאמר כי פונקציה $f(x)$ בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$, אם"ם לכל החלוקות האפשריות של $[a,b]$: $T: x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ ש- $x_0=a$, $x_n=b$, והסכומים: $V(T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ הקבוצה $\{V(T) \mid T \text{ חלוקה}\}$ חסומה.
א. כתוב בסימול [illegible] את הפסוק: "$f(x)$ בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$"
ב. הצג נוסח אחר לשלילת הפסוק ב-א בלא שימוש בסימן השלילה "~".

4. תהי $A_0=\phi$, ונגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$: $A_n=P(A_{n-1})$.
א. מצא את $A_3 \cap A_4$
ב. מצא את $\cup A_n$
ג. חשב את עוצמת הקבוצה: $\{R \mid R\subseteq A_n\times A_n \wedge R \text{ סימטרית}\}$

XX 21
10 31

29

סמסטר ב' תשנ"ה
27.6.95

חלק ב' - קומבינטוריקה

ענה על שתיים מתוך השאלות הבאות:

1. א. תהי $A(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, מצא סדרה $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ שהפונקציה היוצרת שלה היא: $B(x)=(1-x)A(x)$

ב. תהי $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ונגדיר $b_n=\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i$.
אם נתון כי $b_n<\infty$ $\forall n\in N$, מצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

2. הביטוי הבא מוגדר לכל n זוגי:

$$2\left[n+2(n-1)+3(n-2)+\dots+\frac{n(n+2)}{4}\right]$$

הצג ביטוי סגור השווה לביטוי הנ"ל.

3. בכמה מלים באורך n מעל הא"ב $\{0,1,2,\dots,9\}$, מופיעות הספרות $\{0,2,4,6,8\}$ במספר זוגי של מופעים כל אחת.

4. א. כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לאי שוויון:

$$x_1+x_2+\dots+x_n\le n-1$$

ב. הוכח כי מספר הפונקציות המונוטוניות מ- $A_n=\{1,2,3,\dots,n\}$ לעצמו שווה למספר שמצאת בא'.

הגדרה: $f\in A_n^{A_n}$ נקראת מונוטונית אם"ם

$$\forall i,j\in A_n \quad i<j \rightarrow f(i)\le f(j)$$

חלק ג' - תורת הגרפים

הוכח את הטענה (לפי הגדרות יסוד בלבד)

א. אם T הוא עץ בעל n קדקדים אזי יש לו בדיוק n-1 צלעות.

ב. אם G גרף קשיר בעל n קדקדים ו n-1 צלעות, אזי G עץ.

17 32