

אוניברסיטת תל - אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

מתמטיקה בדידה

גיודי מיזלס טל

מועד מיוחד, 27.9.95

משך הבחינה: שלוש שעות.

מותר כל חומר עזר כתוב.

ענה על 5 (חמש) שאלות, משקל כל השאלות זהה. לא תבדקנה שאלות נוספות.

ב ה צ ל ח ה

1. נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{Q} \}$$

$$B = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, i > j \rightarrow a_i > a_j \}$$

א. הוכח במפורש כי $|A| = |B|$.

ב. מצא את עוצמת הקבוצות הנ"ל. הוכח את טענותך.

2. יהיו A, B קבוצות כלשהן, ותהי $f \in B^A$. נגדיר יחס: $R = \{ (x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2) \}$

א. הוכח כי R הוא יחס שקילות.

ב. נגדיר יחס נוסף $\hat{R} = \{ ([x], f(x)) \mid x \in A \}$ מחי שקילות של x

הוכח כי \hat{R} היא פונקציה. מהו הטווח שלה? מהו תחום הגדרתה?

ג. באילו תנאים היא חח"ע?

3. א. מצא ביטוי סגור לאיבר הכללי של הסדרה $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ המוגדרת ע"י:

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k + 1$$

ב. אברי הסדרה $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ מקיימים: $b_k = a_k + 1$. מצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

4. יהי $a_{i,n}$ מספר החלוקות של הטבעי n ל- i מחוברים טבעיים בדיוק, ותהי $A_n(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה: $a_{1,n}; a_{2,n}; a_{3,n}; \dots$

יהי $b_{i,n}$ מספר החלוקות של הטבעי n ל- i מחוברים טבעיים לכל היותר, ותהי $B_n(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה: $b_{1,n}; b_{2,n}; b_{3,n}; \dots$

$$\frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 1 - x$$

5. א. כתוב ביטוי מוצרן לפסוק "סדרת הממשיים $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ מתכנסת לממשי L ".

ב. הצג נוסח מוצרן לשלילת הפסוק ב-א', בלא שימוש בסימן השלילה.

ג. כתוב ביטוי מוצרן לפסוק: "קיימת סדרת ממשיים שאינה מתכנסת".

(אין להביא דוגמא)

6. הצג ביטוי סגור לביטוי הבא (המוגדר לכל n זוגי):

$$2(n+2)/4 + \dots + 3(n-2) + 2(n-1) + n$$

נחק צעדיר.

7. הוכח או הפרך:

בגרף $G = (V, E)$ כל המעגלים מכילים מספר זוגי של צלעות אם $V = V_1 \cup V_2$.

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ולכל $(x, y) \in E$ מתקיים בה"כ $x \in V_1$ ו- $y \in V_2$.

XX

20.