

סנסטר אי תשנ"ו
מועד מיוחד 29.3.96

מתמטיקה בדידה
אברון, טרסי, פרחי

משך הבהינה שלוש שעות. מותר השמוש בכל חומר עזר. השאלות שוות בערך - 20% לשאלה.
שים לב לאפשרויות הבחירה, כמפורט בגוף הבהינה. אין לענות על שאלות מעבר לנדרש.
יש לפרט כל חישוב ולנמק באופן מלא כל תשובה.

כדי להבטיח בדיקה מסודרת של הבהינה, השאר מקום פנוי בראש העמוד הראשון ורשום בו,
עם סיום עבודתך, את מספרי השאלות שפתרת.

האותיות R ו-Q משמשות, כמקובל, לסימון קבוצות המיספרים הממשיים והרציונליים.

ענה על שלוש מהשאלות 1 עד 4.

1. את קבוצת כל הפונקציות מקבוצה S לקבוצה T או מסמנים, בשאלה זו, על ידי $S \rightarrow T$.

נגדיר: $H = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, (f(x)) \in \mathbb{R}\}$. נסמן ב-A את התחום של H וב-B את התמונה שלה. חשב:

א. $A \cap B$ ב. $B \cap H$ ג. $H \cap T$ ד. $(H \cap T) \cap XY$ (5% לכל סעיף)

2. תהיה P קבוצת כל הפסוקים האריתמטיים המורכבים משני מיספרים טבעיים וביניהם אחד הסימנים: $<$, $>$, או $=$ (כגון: $123 = 123$, $15 < 99$, $67 = 55$ וכו').

נגדיר ב-P את היחסים הבאים:

S: הפסוק $\alpha - \beta$ הוא פסוק אמת $(\alpha, \beta) \in S$;

W: הפסוק $\alpha \cdot \beta$ הוא פסוק אמת $(\alpha, \beta) \in W$;

א. (10%) האם S הוא יחס סדר?

ב. (10%) האם W הוא יחס שקילות?

3. נגדיר יחס שקילות E בקבוצת הפונקציות מ-R ל-R כלהלן:

$E = \{ (f, g) \mid \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) - g(x)) \in \mathbb{Q} \}$

א. (10%) הוכח: $T \cdot R^4 = C^C$ (אל תחשב את T).

ב. (10%) בהסתמך על התוצאה בסעיף א' ועל הנתון $T \cdot T = T$, חשב את העוצמה |T|.

4. חשב את עצמת קבוצת כל החלוקות של קבוצת המספרים הממשיים R.

ענה על שתיים מהשאלות 5 עד 8.

5. בכמה אופנים שונים מתקבל הסכום 23 בהטלת שש קוביות משחק (שוונות). נאמר אחת בכל אחד משישה צבעים שונים!;

6. בכמה מילים באורך k, מעל הא"ב {1,2,3,4}, אין שתי הופעות רצופות של הסיפרה 1!

7. 11 סוסי העץ בסתרחרה (קרוסלה) נצבעים, כל סוס באחד הצבעים אדום או שחור. מבין 2¹¹ אופני הצביעה, נאמר ששניים הם שקולים אם האחד מתקבל מהשני תוך סיבוב הסתרחרה. כמה אופני צביעה לא שקולים אפשריים!
רמז: כמה אופני צביעה שקולים לאופן צביעה נתון? כמעט כל מחלקות השקילות שוות בעוצמתן. אך לא כולן!

8. נתון גרף $G = (V, E)$, שבכל תת גרף שלו יש לפחות קדקד אחד שדרגתו אינה גדולה מ-2. הוכח כי קיימת חלוקה של קבוצת הקדקדים V לשלוש מחלקות, כך ששני קדקדי הקצה של כל קשת ב-E שייכים לשתי מחלקות שונות.

התבוננו

XX 75