לג

מתמטיקה בדידה, 1998 סמסטר 1 מועד א

מתמטיקה בדידה
אברון, הירשפלד, טרסי

סמסטר א' תשנ"ח
17.1.98

משך הבחינה **שלוש שעות.**
להוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר, או במחשבון, **אסור**.
יש לענות על **חמש בדיוק** מתוך שש השאלות ולהציג להן פתרון **מלא ומנומק.**
השאלות שוות בערכן, 20 נק' לכל שאלה, חלוקת הנקודות בין הסעיפים מפורטת בגוף הבחינה.
אנא ציין/י בצד הפנימי של שער המחברת על איזו שאלה **בחרת שלא להשיב.**

הסמלים R, N ו- Q מיצגים את קבוצות המספרים הממשיים, הטבעיים והרציונלים, בהתאמה

1. (4 נק' לכל סעיף) חשב את עוצמת כל אחת מהקבוצות :
   - א. $Q \to (N \to R)$
   - ב. קבוצת כל היחסים מ- N ל- R
   - ג. קבוצת מחלקות השקילות של היחס $\{ (x,y) \mid xy > 0 \}$ ב- $R-\{0\}$
   - ד. יחס הזהות ב- $N \to N$ (יחס בקבוצה נקרא גם יחס על הקבוצה)
   - ה. קבוצת הפונקציות מתוך $N \to R$ שהן פונקציות על N

2. א. (10 נק') כמה פונקציות (על פי הגדרת פונקציה כאוסף זוגות) מקבוצה בת 4 אברים לעצמה הן יחסי סדר ?
   ב. (5 נק') כמה פונקציות מקבוצה בת 4 אברים לעצמה הן יחסים סימטריים שהם גם טרנזיטיביים
   ג. (5 נק') כמה פונקציות מקבוצה בת 4 אברים לעצמה הן יחסים טרנזיטיביים ?

3. א. (10 נק') נתון : $H = \lambda f : Q \to P(R).\ \lambda x \in R.\ \{q \in Q \mid x \in f(q)\}$. מצא את התחום של H ואת התמונה שלה (בסעיף זה אין צורך להוכיח שזו התמונה).
   ב. (5 נק') חשב את $H(\lambda q \in Q.\ \{x \in R \mid x \le q^2\})$.
   ג. (5 נק') הראה כי H הפיכה, על ידי הצגת פונקציה הופכית H^{-1} וחישוב ההרכבה $H \circ H^{-1}$ (אינך נדרש לחשב את כיוון ההרכבה השני).

4. א. (12 נק') הצג הוכחה מלאה למשפט קנטור : "עוצמת קבוצת החזקה של כל קבוצה, גדולה ממש מעוצמתה של הקבוצה".
   ב. (4 נק') הוכח : " לכל עוצמה אינסופית α מתקיים $2^{\alpha} \cdot 2^{\alpha} = 2^{\alpha}$ ".
   (אינך רשאי להניח $\alpha = \alpha + \alpha$. באופן גורף, לכל עוצמה אינסופית α).
   ג. (4 נק') הוכח : " לכל עוצמה α קיימת עוצמה β, כך ש $\alpha + \beta = \beta$ ".
   (הנך רשאי להשתמש במשפט מסעיף ב ובמוכח מסעיף א, גם אם לא הוכחת אותם)

5. א. (12 נק') בכמה סדרות באורך k מעל $\{0,1,2\}$ אין שני אברים זוגיים סמוכים ?
   ב. (8 נק') נסמן ב- b_k את מספרן של סדרות כאלה ,באורך **k לכל היותר**. **הצג** ביטוי סגור לפונקציה היוצרת $\lambda x. \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ (אינך נדרש לחשב את b_k).

6. א. (15 נק') בכמה עצים על קבוצת הקדקדים $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, אין עלה קטן מ- 5 ?
   ב. (5 נק') בכמה מטריצות $\{0,1\}$ בעלות n שורות ו- 2n עמודות יש בכל עמודה "0" אחד ובכל שורה שני "0" ים בדיוק ?

שתצליחו !

זהויות בינומיות חשובות

	תנאים	
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$k \le n$	
$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$	$k \ge 1$	(
$(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$	$\alpha \in N \ \vee\ \lvert b/a \rvert < 1$	(
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$		(
$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$	$n \ge 1$	(5
$\binom{-n}{k} = (-1)^k S(n,k) = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$		* (6
$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\cdot\binom{x-k}{n-k}$	$k \le n$	(7
$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$		(8)
$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$	$m \le n$	(9)
$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$		(10

$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$ * גם אז (6) נכון לכלל x:

(ג)

פונקציות יוצרות: תכונות בסיסיות

נניח: F יוצרת את $\lambda n.\ a_n$

G יוצרת את $\lambda n.\ b_n$.

אז:

(1)	$\lambda x.\ \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \alpha \cdot a_n + \beta b_n$
(2)	$\lambda x,\ x^m \cdot F(x)$	" "	$\lambda n. \begin{cases} 0 & n<m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$
(3)	$\lambda x.\ \dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{m-1}x^{m-1}}{x^m}$	" "	$\lambda n.\ a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.\ F(cx)$	" "	$\lambda n.\ c^n a_n$
(5)	$\lambda x.\ F(x^m)$	" "	$\lambda n. \begin{cases} a_{\frac{n}{m}} & m \mid n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
(6)	$\lambda x.\ F(x) \cdot G(x)$	" "	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\ \dfrac{F(x)}{1-x}$	" "	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k$
(8)	F'	" "	$\lambda n.\ (n+1) a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.\ x \cdot F'(x)$	" "	$\lambda n.\ n a_n$
(10)	$\lambda x.\ \int_0^x F(t)dt$	" "	$\lambda n. \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0 \end{cases}$

פונקציות יוצרות: דוגמאות קצרות

פונקציה יוצרת	סדרה יוצרת	כתיבה לא פורמלית
$\lambda x.\ x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0,0,\dots,0,1,0,0,0\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{1}{1-x}$	$\lambda n.\ 1$	$\langle 1,1,1,1,\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{1}{1+x}$	$\lambda n.\ (-1)^n$	$\langle 1,-1,1,-1,-1,1,\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{1}{1-cx}$	$\lambda n.\ c^n$	$\langle 1,c,c^2,c^3,c^4,\dots\rangle$
$\lambda x.\ (1+x)^{\alpha}$	$\lambda n.\ \binom{\alpha}{n}$	$\langle 1,\alpha,\binom{\alpha}{2},\binom{\alpha}{3},\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$	$\lambda n.\ \binom{\alpha+n-1}{n}$	$\langle 1,\alpha,\binom{\alpha+1}{2},\binom{\alpha+2}{3},\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\ \binom{m+n}{m}$	$\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\dots\rangle$
$\lambda x.\ \frac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.\ n$	$\langle 0,1,2,3,4,\dots\rangle$
$\lambda x.\ -\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ 1/n & n>0\end{cases}$	$\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\rangle$
$\lambda x.\ e^{ax}$	$\lambda n.\ \frac{a^n}{n!}$	$\langle 1,a,\frac{a^2}{2!},\frac{a^3}{3!},\dots\rangle$
$\lambda x.\cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\frac{a^n}{n!} & \text{זוגי } n\\ 0 & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$	$\langle 1,0,\frac{a^2}{2!},0,\frac{a^4}{4!},\dots\rangle$
$\lambda x.\ \sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & \text{זוגי } n\\ \frac{a^n}{n!} & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$	$\langle 0,a,0,\frac{a^3}{3!},0,\frac{a^5}{5!},0,\dots\rangle$

בתכונות · היסודיות Fr הבדידות Fr ודומות

(1) (i) $a+b=b+a$ (ii) $a\cdot b=b\cdot a$

(2) (i) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ii) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(3) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

(4) (i) $a+0=a$ (ii) $a\cdot 0=0$ (iii) $a^0=1$

(iv) $a\cdot 1=a$ (v) $a^1=a$ (vi) $0^a=0$ $(a\neq 0)$

(vii) $1^a=1$

(5) $a^c\cdot b^c = (a\cdot b)^c$

(6) $a^b\cdot a^c = a^{b+c}$

(7) $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$

(8) (i) $a\le b \wedge c\le d \Rightarrow a+c\le b+d$

(ii) $a\le b \wedge c\le d \Rightarrow a\cdot c\le b\cdot d$

(iii) $a\le b \wedge c\le d \Rightarrow a^c\le b^d$

(פרט למקרה $a=c=b=0$, $d\neq 0$)

(9) $2^a > a$