

2.11.99

מתמטיקה בדידה

סמסטר א תשנ"ט - מועד מיוחד
 סמסטר ב' תשנ"ט - מועד מיוחד
 סמסטר קיץ תשנ"ט - מועד ב'
 פרופ' אברון, פרופ' הירשפלד, פרופ' טרסי, פרופ' רוזיט

משך הבחינה שלוש וחצי שעות
 לשאלון מצורפים דפי ניסחאות. השימוש בחומר עזר אחר אסור.

יש לחשיב על כל השאלות 1,2,3,4,5 ועל אחת משלש השאלות 6 או 7 או 8.
 לכל אחת מארבע השאלות בעלות הסתורנות הטובים ביותר ינתן משקל של 20%
 ולשתי השאלות האחרות 10% לכל אחת (בבדיקה ינתנו לכל שאלה עד 20 נקודות
 ולפני סיכום הנקודות הציון לשאלות ה"חלשות" יחולק ב-2).

1. יהי $|A| = \aleph_0$, $B \subseteq P(A)$ ו- $|B| < \aleph_0$ הפרד או הבא דוגמא:

- האם יתכן שכל שתי קבוצות ב- B זרות זו ולזו?
- האם יתכן שכל אבר של A נמצא במספר בן מניה של קבוצות מתוך B ?
- האם יתכן שחיתוך כל שתי קבוצות ב- B הוא קבוצה סופית?
 (רמז ל- ג): כל מספר ממשי הוא גבול של סדרת רציונליים).

2. תהי $g: A \rightarrow B$ פונקציה הפיכה (כלומר פונקציה שקילות בין הקבוצות A ו- B),
 ותהי H הפונקציה המוגדרת להלן: $H = \{f \in \text{Eq}(A,A) \mid g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Eq}(B,B)\}$.

הוכח כי H היא פונקציה הפיכה מ- $\text{Eq}(A,A)$ ל- $\text{Eq}(B,B)$. מצא מהי H^{-1} והוכח שהיא
 אכן הפונקציה ההפוכה ל- H .
 ($\text{Eq}(A,A)$ היא קבוצת הפונקציות ההפיכות מ- A ל- A).

3. תחל A קבוצה ותהי $*$ פעולה דו מקומית על A (פעולה בין אברי A) המקיימת:

$$i. \quad a * a = a$$

$$ii. \quad a * b = b * a$$

$$iii. \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$R = \{(a,b) \in A^2 \mid a * b = a\}$$

א. האם R הוא בהכרח יחס סדר ב- A ?

ב. תן דוגמא לקבוצה A ולפעולה $*$ כנייל, עבורם R הוא יחס סדר, אבל אינו יחס
 סדר מלא (יחס סדר S ב- A הוא סדר מלא כאשר לכל שני אברים a ו- b מתוך
 A מתקיים $(a,b) \in S$ או $(b,a) \in S$).

4.

א. בכמה אופנים ניתן לחלק 200 כדורים זהים ל-40 תאים ממספרים 1, 2, ..., 40 כך שמספר כל הכדורים בתאים 1 עד 20 יהיה גדול ממש ממספר הכדורים בתאים 21 עד 40. (תשובה הכוללת את הסימן \sum תזכה לכל היותר במחצית מהניקוד).

ב. נסמן ב- $f(n)$ את מספר הסדרות השונות באורך n המורכבות מהאותיות A, B, C שבהן לא מופיע הצרוף AA. חשבו את $f(n)$.

5.

א. חשבו את a_{10} בסדרה $\lambda k \cdot a_k$ הנוצרת על ידי הפונקציה $\lambda x \cdot \frac{6-10x}{2x^2-3x+1}$

ב. נתונה הסדרה $\lambda n \cdot a_n$ המוגדרת על ידי:

$$a_n = 5a_{n-1} + 4$$

$$a_0 = 4$$

סדרה נוספת $\lambda k \cdot b_k$ מוגדרת באמצעות: $b_n = 2a_n + 7$. רשום נוסחת

נסיגה עבור הסדרה $\lambda k \cdot b_k$ ומצא ביטוי מפורש ל- b_n .

זכור לענות על אחת בלבד מהשאלות 6 או 7 או 8.

6.

א. תהיה $\lambda k \cdot a_k$ סדרה המקיימת לכל k טבעי $a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k$ עבור אילו זוגות של ערכי התחלה ממשיים, a_0, a_1 , הסדרה $\lambda n \cdot a_n$ מתכנסת ולאיזה גבולות?

ב. בחר פולינום מתאים והשתמש בשיטת ברנולי לחשב את $\sqrt[3]{2}$ בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג. הוכח כי התוצאה אכן מספקת את הדיוק הנדרש.

7. ענה על שלושה בלבד מסעיפי השאלה

א. הוכח שאם $G = G(A, E)$ גרף קשיר כך ש- $|A| = |E|$ אזי ב- G יש מעגל יחיד.

ב. הוכח כי אם נחלק את קשתות הגרף השלם K_n ל- 8 קבוצות באופן כלשהו (חלקן אולי ריקות), אזי לפחות אחת מהקבוצות תכיל מעגל.

ג. יהי d עץ אשר דרגות כל קדקדיו אי-זוגיות. הוכח כי מספר קשתותיו גם הוא אי-זוגי.

ד. יהי G גרף פשוט על n צמתים. יהיו x ו- y שני צמתים ב- G כך שבין x

ל- y אין קשת וכן $d(x) + d(y) \geq n$. הוכח כי הגרף מכיל מעגל באורך ארבע. (C)

מתמטיקה בדידה, 1999, סמסטר 1, מועד מיוחד עמוד 3 מתוך 6

8. בשאלה הבאה N ו- R הם קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים הממשיים בהתאמה.
 בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו לאיזו קבוצה עוצמה גדולה יותר או שמה הן שוות עוצמה. נמקו קביעתכם!

א) R^N ; N^R

ב) $P(N)^{P(N)}$; $P(R)^N$

ג) $P(N)$; $P(R) \setminus P(R \setminus N)$

בהצלחה!