

סמסטר א', תשנ"ט

מתמטיקה בדידה

פחפי א. אברון, פרופי י. הירשפלד, פרופי י. רודיטי 2/3/99

משך הבחינה: 3 שעות וחצי השעה.  
 לחוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר, אסור.

בבחינה 7 שאלות. עליך לענות על השאלות 1-5 וכן על אחת בלבד מבין השאלות 6-7. לכל שאלה ניקוד זהה. ארבע התשובות הטובות ביותר תזכינה את הכותב ב- 80% של הציון. על תשובה לשתי השאלות הנותרות יינתנו לכל חיותר 10% לכל שאלה.  
 רשום תשובה מלאה ומנומקת.  
 תשובות לשאלות שונות יש להתחיל בעמוד חדש.

הסמלים  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  מייצגים את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים והממשיים, בהתאמה.

1. הוכח או הפוך: (פרט את כל נימוקיך).

$$(i) P(\{An \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \{B \in P(\mathbb{N}) : |B| = |B \Delta \{k \mid k \in \mathbb{N}\}|\}$$

$$(ii) \lambda x \in \mathbb{R}. e^x \in \{g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall y \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}. y \in \{g(x) : x \in \mathbb{R}\}\}$$

$$(iii) \forall f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}. \forall g \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} ((\forall x \in \mathbb{N}. \exists y \in \mathbb{N}. g(f(y))=x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}. \exists y \in \mathbb{N}. f(y)=x))$$

$$(iv) \forall f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}. \forall g \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} ((\forall x \in \mathbb{N}. \exists y \in \mathbb{N}. g(f(y))=x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}. \exists y \in \mathbb{Z}. g(y)=x))$$

2. (א) על  $\mathbb{Z}$  נגדיר שני יחסים:  $S, T$  כך ש-  $k S m \Leftrightarrow k-m$  מתחלק ב-5.

וכן  $k + m \Leftrightarrow k T m$  מתחלק ב-5.

הוכח או הפוך: (I) הוא יחס שקילות.

(II) הוא יחס שקילות.

(III)  $S \cup T$  הוא יחס שקילות.

(ג) בכל אחד מחמקרים בהם הייתה תשובתכם "נכון", מצאו את עוצמת קבוצת המנה.

3: תהינה  $A$  ו- $B$  קבוצות לא ריקות. תהי:  $F: A \rightarrow P(B)$ . נסמן:

$$\Pi(F) = \{ f \in A \rightarrow B \mid \forall a \in A . f(a) \in F(a) \}$$

תהי  $G$  פונקציה המתאימה לכל  $a \in A$  פונקציית שקילות מ-  $F(a)$  על  $A$ .

(א) מצאו תחום וטיוח ל- $G$ .

(ב) הראו כי  $\Pi(F) \rightarrow (A \rightarrow A)$  אינה ריקה.

(ג) בנו פונקציית שקילות מ-  $\Pi(F)$  על  $A \rightarrow A$  (הוכיחו כי היא אכן פונקציית שקילות).

(ד) נניח  $|A| = \aleph_0$ ,  $|B| = \aleph$ . מהי עוצמת  $\Pi(F)$ ? נמק!

4. 2n ליצנים יושבים בקרוסלה עם הפנים פנימה. כל אחד מהם רואה מולו בדיוק ליצן אחד. בכמה אופנים הם יכולים לחלוקי מקומות כך שכל אחד מהם יראה ליצן חדש מולו אם:

(א) המקומות בקרוסלה מסומנים.

(ב) המקומות בקרוסלה אינם מסומנים.

5. במכללה לאחד-דרפנים בשושן הבירה נערך מבחן במתמטיקה בדידה. צוות המורים, בראשות המן הרשע, קיבל את ההחלטות הבאות:

(i) במבחן יהיו שש שאלות.

(ii) הציון המקסימאלי האפשרי במבחן יהיה 100%.

(iii) לכל שאלה יוקצה מראש מספר מסוים של נקודות. מספר זה חייב להיות כפולה שלמה, חיובית, של 1/6 (מספר זה יכול להשתנות משאלה לשאלה).

(א) מה מספר האפשרויות לחלוקת הנקודות בין השאלות בתנאים הנ"ל.

(ב) מה מספר האפשרויות לחלוקת הנקודות בין השאלות אם בנוסף דורשים

ששאלות 1 ו-2 תהיינה שוות בערכן, שאלות 3 ו-4 תהיינה שוות בערכן,

שאלות 5 ו-6 תהיינה שוות בערכן, והערך של שאלה 5 יהיה קטן ממש מהערך

של שאלה 1?

6. נתונה טיחנת הנסיגה הבאה. רשום ביטוי מפורש של  $a_n$

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^{n-n} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

מתמטיקה בדידה, 1999 סמסטר 1 מועד א עמוד 3 מתוך 6

7. (א) הוכח כי אם  $F = F(V, E)$  הוא יער אזי  $|V| > |E|$ .
- (ב) הוכח שאם  $G = G(V, E)$  גרף קשיר כך ש- $|V| = |E|$  אזי ב- $G$  יש מעגל יחיד.
- (ג) הוכח כי אם נחלק את קשתות הגרף השלם  $K_n$  ל- $s$  קבוצות באופן כלשהו (חלקן אולי ריקות), אזי לפחות אחת מ הקבוצות מכילה מעגל מנוצל כלשהו.
- (ד) יהי  $T$  יצי אשר דרגות כל צמתיו אי-זוגיות. הוכח כי מספר קשתותיו גם הוא אי-זוגי.

בהצלחה!