

15.9.99

## מתמטיקה בדידה

סמסטר א' תשנ"ט - מועד ב'  
 סמסטר ב' תשנ"ט - מועד ב'  
 סמסטר קיץ תשנ"ט - מועד א'  
 פרופ' אברון, פרופ' הירשפלד, פרופ' טרסי, פרופ' רודיטי

משך הבחינה שלוש וחצי שעות  
 לשאלון מצורפים דפי נוסחאות. השימוש בחומר עזר אחר אסור.

יש לחשוב על כל השאלות 1,2,3,4,5 ועל אחת משלוש השאלות 6 או 7 או 8.  
 לכל אחת מארבע השאלות בעלות המתרונות הטובים ביותר ינתן משקל של 20%  
 ולשתי השאלות האחרות 10% לכל אחת (בבדיקה ינתנו לכל שאלה עד 20 נקודות  
 ולפני סיכום הנקודות הציון לשאלות ה"חלשות" יחולק ב-2).

1. יהי  $|A|=n$ ,  $B \subseteq P(A)$  ו-  $|B|=k$ . הפרד או הבא דוגמא:
  - א. האם יתכן שכל שתי קבוצות ב-  $B$  זרות זו ולזו!
  - ב. האם יתכן שכל אבר של  $A$  נמצא במספר בן מניה של קבוצות מתוך  $B$ !
  - ג. האם יתכן שחיתוך כל שתי קבוצות ב-  $B$  הוא קבוצה סופית!  
 (רמז ל- ג): כל מספר ממשי הוא גבול של סדרת רציונליים).
2. תהי  $g: A \rightarrow B$  פונקציה הפיכה (כלומר פונקצית שקילות בין הקבוצות  $A$  ו-  $B$ ).  
 ותהי  $H$  הפונקציה המוגדרת להלן:  $H = \{f \in A \rightarrow A \mid g \circ f \circ g^{-1}\}$   
 הוכח כי  $H$  היא פונקציה הפיכה מ-  $Eq(A,A)$  ל-  $Eq(B,B)$ . מצא מהי  $H^{-1}$  והוכח שהיא  
 אכן הפונקציה ההפוכה ל-  $H$ .  
 ( $Eq(A,A)$  היא קבוצת הפונקציות ההפיכות מ-  $A$  ל-  $A$ ).
3. תהי  $A$  קבוצה ותהי \* פעולה דו מקומית על  $A$  (פעולה בין אברי  $A$ ) המקיימת:
  - i.  $a * a = a$
  - ii.  $a * b = b * a$
  - iii.  $a * (b * c) = (a * b) * c$
 יהי  $R = \{(a,b) \in A^2 \mid a * b = a\}$   
 א. האם  $R$  הוא בתכרח יחס סדר ב-  $A$ !  
 ב. תן דוגמא לקבוצה  $A$  ולפעולה \* כנייל, עבורם  $R$  הוא יחס סדר, אבל אינו יחס  
 סדר מלא (יחס סדר  $S$  ב-  $A$  הוא סדר מלא כאשר לכל שני אברים  $a$  ו-  $b$  מתוך  
 $A$  מתקיים  $(a,b) \in S$  או  $(b,a) \in S$ ).

4. א. בכמה אופנים ניתן לחלק 200 כדורים זהים ל-40 תאים ממוספרים 1, 2, ..., 40 כך שמספר כל הכדורים בתאים 1 עד 20 יהיה גדול ממש ממספר הכדורים בתאים 21 עד 40. (תשובה הכוללת את הסימן  $\sum$  תזכה לכל היותר במחצית מהניקוד).

ב. נסמן ב-  $f(n)$  את מספר הסדרות השונות באורך  $n$  המורכבות מהאותיות  $A, B, C$  שבהן לא מופיע הצרף  $AA$ . חשבו את  $f(n)$ .

5. א. חשבו את  $a_n$  בסדרה  $\lambda k, a_k$  הנוצרת על ידי הפונקציה  $\lambda x \cdot \frac{6-10x}{2x^2-3x+1}$

ב. נתונה הסדרה  $\lambda n, a_n$  המוגדרת על ידי:

$$a_n = 5a_{n-1} + 4$$

$$a_0 = 4$$

סדרה נוספת  $\lambda k, b_k$  מוגדרת באמצעות:  $b_k = 2a_k + 7$ . רשום נוסחת

נסיגה עבור הסדרה  $\lambda k, b_k$  ומצא ביטוי מפורש ל-  $b_n$ .

זכור לענות על אחת בלבד מהשאלות 6 או 7 או 8.

6. א. תהיה  $\lambda k, a_k$  סדרה המקיימת לכל  $k$  טבעי  $a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k$  עבור אילו זוגות של ערכי התחלה ממשיים,  $a_0, a_1$ , הסדרה  $a_n$  מתכנסת ולאווה גבולות?

ב. חזר פולינום מתאים והשתמש בשיטת ברנולי לחשב את  $\sqrt{2}$  בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג. הוכח כי התוצאה אכן מספקת את הדיוק הנדרש.

7. ענה על שלושה בלבד מסעיפי השאלה

א. הוכח שאם  $f(x) = g(x) + h(x)$  גרף קשיר כך ש-  $f(x) = g(x) + h(x)$  אזי ב-  $g$  יש מעגל יחיד.

ב. הוכח כי אם נחלק את קשתות הגרף השלם  $K_{17}$  ל-8 קבוצות באופן כלשהו (חלקן אולי ריקות), אזי לפחות אחת מהקבוצות תכיל מעגל.

ג. יהי  $D$  עץ אשר דרגות כל קדקדיו אי-זוגיות. הוכח כי מספר קשתותיו גם הוא אי-זוגי.

ד. יהיו  $x$  ו-  $y$  שני קדקדים בגרף בעל  $n$  קדקדים כך שבין  $x$  ל-  $y$  אין קשת וכן  $d(x) + d(y) \geq n$ . הוכח כי הגרף מכיל מעגל באורך ארבע (C4).

מתמטיקה בדידה, 1999 סמסטר 1 מועד ב עמוד 3 מתוך 3

8. בשאלה הבאה  $N$  ו- $R$  הם קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים הממשיים בהתאמה.  
 בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו לאיזו קבוצה עוצמה גדולה יותר או שמה הן שוות עוצמה. נמקו קביעתכם!

- א  $R^N ; N^R$
- ב  $P(R)^{P(N)} ; P(R)^N$
- ג  $P(N) ; P(R) \setminus P(R \cap N)$

בהצלחה!