

- משך הבחינה **שלוש שעות**. להוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר **אסור**. יש לענות על כל שש השאלות ולהציג להן פתרון **מלא ומנומק**.
חשוב הציון: עד 20 נקודות לכל אחת מארבע השאלות שהתשובות עליהן טובות יותר ועד 10 נקודות לכל אחת משתי התשובות הייטובות פחות". הסעיפים בכל שאלה שוים בערכם.
הסמלים N ו- Z מיצגים את קבוצות המספרים הטבעיים והשלמים, בהתאמה.

1. א. הוכח שלכל שתי קבוצות A ו- B מתקיים $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$
- ב. הוכח שלכל שלוש קבוצות A, B ו- C מתקיים $|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$
- ג. הכלל (ללא הוכחה) את הנוסחאות של שני הסעיפים הקודמים לכל n קבוצות A_1, A_2, \dots, A_n
2. יהיו A, B ו- C קבוצות. נגדיר $H : ((B\cup C)\rightarrow A) \rightarrow ((B\rightarrow A)\times(C\rightarrow A))$ על ידי $H = \lambda h \in (B\cup C)\rightarrow A. \langle h|_B, h|_C \rangle$
כאשר $h|_B$ ו- $h|_C$ הם הצמצומים של h ל- B ול- C בהתאמה:
 $h|_B = \lambda x \in B. h(x)$ ו- $h|_C = \lambda x \in C. h(x)$
- א. מצא פונקציה G כך ש- $G \cdot H = I_{(B\cup C)\rightarrow A}$
- ב. באילו תנאים על A, B ו- C תהיה H חד חד ערכית?
- ג. באילו תנאים על A, B ו- C תהיה H פונקציה על $(B\rightarrow A)\times(C\rightarrow A)$?
3. תהיה A קבוצה ו- $f: A \rightarrow A$ פונקציה, מבין ארבע הטענות הבאות שלוש הן שקולות זו לזו, מצא את שלוש השקולות, הוכח את השקולות והראה כי הטענה הנוספת אינה שקולה להן:
- א. f (כקבוצה של זוגות) היא יחס טרנזיטיבי ב- A
- ב. f היא פונקצית הזהות ב- A , או ש- $\exists a \in A f = \lambda x \in A. a$
- ג. f מצומצמת לתמונה שלה היא פונקצית הזהות בתמונה
- ד. $f = f \circ f$

4. עבור יחס שקילות S ב-N נגדיר :
 $C_S = \{f \in N/S \rightarrow N \mid \forall M \in N/S. f(M) \in M\}$

א. יהיה $\{ |x-y| \text{ מתחלק ב-4} \mid \langle x,y \rangle \in S$. תן דוגמה לפונקציה f מתוך C_S .

ב. מצא יחס שקילות S שעבורו $|C_S|=7$

ג. הוכח כי אם $|C_S| > \aleph_0$ אזי $|C_S| = \aleph_0$
 (אינך רשאי להניח כי לא קיימת עצמה בין א לבין \aleph_0).

5. א. בכמה סדרות באורך n של הספרות 0,1,2,3,4 סכום הספרות הוא 9 ?

ב. בכמה עצים על קבוצת הקדקדים $V = \{1,2,\dots,n\}$ לקדקד 1 דרגה 1 ולקדקד 2 דרגה גדולה מ-1 ?

6. נגדיר גרף $G_n = \langle V_n, E_n \rangle$ על ידי $V_n = \{k \in N \mid 0 < |k| \leq n\} \times \{-1, 1\}$
 $E_n = \{ \{ \langle k,a \rangle, \langle m, b \rangle \} \in P(V_n) \mid (k=m \wedge a \neq b) \vee (|k-m|=1 \wedge a=b) \}$

א. שרטט דיאגרמה של G_5 .

ב. כמה עצים פורשים יש ל- G_3 (עץ פורש של גרף קשיר G הוא תת גרף של G שהוא עץ וכולל את כל הקדקדים של G) ?

ג. כמה עצים פורשים יש ל- G_n ?