הצעת פתרון למבחן במתמטיקה בדידה 27.2.2001

שאלה 1

א. <u>צ.ל</u>: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$.

<u>הוכחה</u>: כדי שנוכל להשתמש בחיבור עוצמות עלינו לדאוג שהקבוצות תהיינה זרות.

באגף שמאל:

$$|A|+|B|=|(A\backslash B)\cup(A\cap B)|+|(B\backslash A)\cup(B\cap A)|=|A\backslash B|+|A\cap B|+|B\backslash A|+|B\cap A|$$

באגף ימין:

$$|A\cup B|+|A\cap B|=|(A\backslash B)\cup(A\cap B)\cup(B\backslash A)|+|A\cap B|=$$

$$=|A\backslash B|+|A\cap B|+|B\backslash A|+|B\cap A|$$

וכך קיבלנו ששני האגפים זהים. **מ.ש.ל.**

ב. <u>צ.ל</u>: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים:

$$|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$$

<u>הוכחה</u>: ראשית, נשתמש בטענה שהוכחנו בסעיף הקודם על מנת להראות ש:

$$|A|+|B|+|C|=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

הוכחה לכך:

$$|A|+|B|+|C|=|A\cup B|+|A\cap B|+|C|=|A\cup B\cup C|+|(A\cup B)\cap C|+|A\cap B|=$$

$$=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

כעת נתבונן באגף שמאל של הטענה אותה אנו מוכיחים: (גם כאן נשתמש בסעיף א')

$$|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|(A\cap C)\cup(B\cap C)|+|A\cap B\cap C|=$$

$$=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|(A\cap C)\cup(B\cap C)|+|(A\cap C)\cap(B\cap C)|=$$

$$=|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$$

וכך הגענו לאגף ימין. **מ.ש.ל.**

ג. נכליל את הטענות של הסעיפים הקודמים ל- n קבוצות כך:

$$\boxed{\text{סכום חיתוכי i קבוצות לכל i זוגי}} + \boxed{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \boxed{\text{סכום חיתוכי i קבוצות לכל i אי זוגי}}$$

הערה חשובה: בעת כתיבת פתרון לשאלה זו, יש לשים לב, שאסור לכתוב באף אחד משלבי ההוכחה את פעולת החיסור, מאחר שכידוע, חיסור עוצמות אינו מוגדר היטב.

שאלה 2

א. צ.ל: פונקציה G כך ש- $G\circ H=I_{(B\cup C)\to A}$.

פתרון:

ברור, כי התחום והטווח של הפונקציה G הם: $G:((B\to A)\times(C\to A))\to((B\cup C)\to A)$.

G מקבלת זוג סדור של פונקציות, וצריכה להחזיר פונקציה אחת. נגדיר אותה כך:

$$G=\lambda<f,g>\in(B\to A)\times(C\to A).\lambda x\in B\cup C.\begin{cases} f(x) & x\in B \\ g(x) & else \end{cases}$$

ב. צ.ל: באילו תנאים תהיה הפונקציה H חד-חד ערכית?

פתרון: הפונקציה H תהיה **תמיד** חד-חד ערכית. נוכיח זאת:

נניח $h_1,h_2\in(B\cup C)\to A$ ונניח $H(h_1)=H(h_2)$. עלינו להראות כי: $h_1=h_2$.

אם $H(h_1)=H(h_2)$ אזי $<h_1|_B,h_1|_C>=<h_2|_B,h_2|_C>$ ומכאן: $h_1|_B=h_2|_B\wedge h_1|_C=h_2|_C$.

לכן $h_1=h_2$ כי אם שתי הפונקציות נותנות את אותם ערכים לכל איבר ב- B או ב- C אז כמובן נותנות את אותם ערכים גם באיחוד של שתי קבוצות אלה.

לכן הפונקציה H חד-חד ערכית לכל שלוש קבוצות A, B, C.

ג. צ.ל: באילו תנאים תהיה הפונקציה H על?

פתרון: הפונקציה תהיה על באחד המקרים הבאים: $\underline{B\cap C=\phi}$ **או** $\underline{|A|=1}$.

המקרה של $|A|=1$ הוא מקרה "מנוון" ואף טרוויאלי, שכן אם יש רק איבר אחד בקבוצה A אזי גם בקבוצה $(B\to A)\times(C\to A)$ יש רק איבר אחד ולכן הפונקציה היא פונקציית על.

כמו כן, אם $B\cap C=\phi$ אזי לכל זוג כזה: $<f,g>$ ניתן להגדיר h כך ש- $H(h)=<f,g>$ באופן הבא:

$$h=\lambda x\in B\cup C.\begin{cases} f(x) & x\in B \\ g(x) & x\in C \end{cases}.$$

פונקציה זו מוגדרת היטב מאחר ש- $B\cap C=\phi$, כיוון שכל x מתאים בדיוק לאחד המקרים של הפונקציה h הנ"ל.

שאלה 3

הטענות השקולות זו לזו הן טענות **א', ג' ו-ד'**. טענה **ב'** אינה שקולה לשאר הטענות.

נוכיח את שקילותן של שלוש הטענות:

<u>א← ג</u>

נניח את א', כלומר נניח ש f היא יחס טרנזיטיבי ב- A.

נניח בשלילה כי ג' אינו מתקיים, כלומר קיים $b\in A$ בתמונה של f כך ש- $f(b)\neq b$. B בתמונה של הפונקציה f, לכן קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

קיבלנו: $f(a)=b$ כלומר a מתייחס ל- b ; $c=f(b)\neq b$ כלומר b מתייחס ל- c.

מאחר ש- f היא יחס טרנזיטיבי מתקיים: $f(a)=c$ ולכן $b=f(b)\neq b$. סתירה. **מ.ש.ל.**

<u>ג← ד</u>

נניח את ג', כלומר נניח ש f מצומצמת לתמונה שלה היא פונקצית הזהות בתמונה.

נניח בשלילה ש- ד' אינו מתקיים כלומר $f\neq f\circ f$. אזי קיים $a\in A$ עבורו $f(a)\neq f(f(a))$. אזי $f(a)$ לא עובר לעצמו, אבל הוא בתמונה ולכן סתירה. **מ.ש.ל.**

<u>ד← א</u>

נניח את ד', כלומר ש- $f=f\circ f$.

נניח בשלילה ש- א' אינו מתקיים כלומר f אינה יחס טרנזיטיבי. אזי קיימים $a,b,c\in A$ כך ש: $f(a)=b, f(b)=c, f(a)\neq c$. מכאן $b\neq c$ ולכן $f(a)\neq f(f(a))$. זוהי כמובן סתירה לכך ש- $f=f\circ f$. **מ.ש.ל.**

<u>ב' אינה שקולה לשאר הטענות</u>

נראה זאת באמצעות הדוגמה הנגדית הבאה:

ניקח כקבוצה A את קבוצת המספרים השלמים Z.

נגדיר את הפונקציה: $f(x)=|x|$ (ערך מוחלט).

ניתן לראות בקלות שטענה ד' מתקיימת כי: $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(|x|)=||x||=|x|$ ולפי השקילות שהוכחנו מתקיימות גם הטענות א' ו- ג'.

אולם טענה ב' אינה מתקיימת: f אינה פונקצית הזהות כי למשל $f(-3)=|-3|=+3$, והיא גם לא פונקציה קבועה.

שאלה 4

א. צ.ל: דוגמה לפונקציה f מתוך C_S.

פתרון: עלינו לתת דוגמה לפונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת מחלקות השקילות של היחס S והטווח שלה הוא המספרים הטבעיים. התמונה של כל מקור צריכה להיות שייכת למקור (הרי המקורות כאן הם קבוצות בעצמם !!!).

עבור היחס S ישנן ארבע מחלקות שקילות: ($N_0 = N \cup \{0\}$)

$$M_1 = \{4n \mid n \in N\}\ ;\ M_2 = \{4n+1 \mid n \in N_0\};\ M_3 = \{4n+2 \mid n \in N_0\};\ M_4 = \{4n+3 \mid n \in N_0\}$$

ולכן נגדיר את הפונקציה f כך:

$$f(M) = \begin{cases} 4 & M = M_1 \\ 1 & M = M_2 \\ 2 & M = M_3 \\ 3 & M = M_4 \end{cases}$$

קל לראות שפונקציה זו מקיימת את הנדרש.

ב. צ.ל: דוגמה ליחס שקילות S שעבורו $|C_S| = 7$.

פתרון: עלינו למצוא יחס שקילות S שבו, בכל מחלקת שקילות יהיה רק איבר אחד ולכן הוא יהיה חייב להיות האיבר שתוחזר בפונקציה, מלבד מחלקת שקילות אחת שבה 7 איברים, ולכן יהיה ניתן לבחור את אחד מהם עבור מחלקת שקילות זו. כך תהיינה 7 פונקציות כאלה.

נחלק את המספרים הטבעיים כך: מחלקת שקילות אחת תהיה הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ושאר מחלקות השקילות תהיינה הסינגלטונים: $\{8\},\{9\},\{10\},\ldots$.

הגדרה פורמלית של יחס זה תיכתב כך: $\underline{S = \{(x,y) \mid x = y \vee 1 \le x,y \le 7\}}$.

ג. צ.ל: אם $|C_S| > \aleph_0$ אזי $|C_S| = \aleph$.

הוכחה: **אל** לנו להניח כי לא קיימת עוצמה בין $\aleph$ לבין $\aleph_0$, אולם עלינו לזכור כי לא קיימת עוצמה שאינה סופית וקטנה מ- $\aleph_0$.

המשך בדף הבא

אם $|C_S|>\aleph_0$ אזי לא ייתכן שעוצמת קבוצת מחלקות השקילות של היחס S סופית. זאת, כי אם עוצמת קבוצת מחלקות השקילות של היחס S היא סופית, אז $|C_S|$ סופית או בת מנייה.

מאחר שלא קיימת עוצמה שאינה סופית וקטנה ממש מ- $\aleph_0$, נסיק ש- $\left|N/S\right|=\aleph_0$ (חסום משני הכיוונים כי $\left|N/S\right|\le|N|$).

כמו כן לא ייתכן שמספר סופי של מחלקות שקילות בעוצמה אינסופית, כי אז $|C_S|=\aleph_0$ ולכן לפנינו בהכרח קבוצת מחלקות שקילות בעוצמה $\aleph_0$ שעוצמותיהן $\aleph$. לכן $\aleph\ge|C_S|$.

מצד שני: $\aleph=\aleph_0^{\aleph_0}\le|N|^{\left|N/S\right|}\le|C_S|$. לכן: $|C_S|=\aleph$. **מ.ש.ל.**

שאלה 5

א. <u>צ.ל</u>: בכמה סדרות באורך n של הספרות 0,1,2,3,4 סכום הספרות הוא 9 ?

<u>פתרון</u>: נבנה פונקציה יוצרת המתאימה לתוכן הבעיה:

$$F(x)=\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^n$$

עלינו למצוא את המקדם של x^9 בפיתוח פונקציה יוצרת זו.

$$F(x)=\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^n=\left(1-x^5\right)^n\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

$$\left(1-x^5\right)^n=1-nx^5+\binom{n}{2}x^{10}-\ldots$$

$$(1-x)^{-n}=1+\ldots+\binom{4+n-1}{4}x^4+\ldots+\binom{9+n-1}{9}x^9+\ldots$$

ולכן המקדם של x^9 הוא: $\underline{\binom{8+n}{9}-n\cdot\binom{3+n}{4}}$

ב. <u>צ.ל</u>: בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ לקודקוד 1 דרגה 1 ולקודקוד 2 דרגה גדולה מ-1 ?

<u>פתרון</u>: נשתמש בנוסחת קיילי.

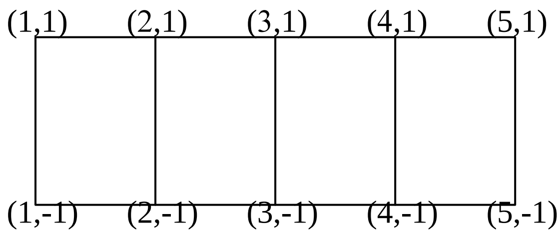
מספר העצים שבהם דרגת הקודקוד 1 היא 1 הוא: $(n-1)^{n-2}$.

מספר העצים שבהם דרגת הקודקודים 1 ו- 2 היא 1 הוא: $(n-2)^{n-2}$.

הפרש ערכים אלו ייתן את התשובה לשאלה, ולכן התשובה היא: $\underline{(n-1)^{n-2}-(n-2)^{n-2}}$.

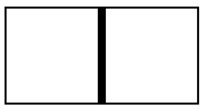
שאלה 6

א. נשרטט דיאגרמה של G_5.



ב. כמה עצים פורשים יש ל- G_3 ?

דיאגרמה של G_3 נראית כך:



נבחין בין שני מקרים:

(1). הקשת המודגשת (שבתוך המלבן) איננה מחוברת, אזי כדי שיתקבל עץ פורש יש "לוותר" בנוסף לכך על אחת משש הקשתות האחרות. כלומר במקרה זה 6 אפשרויות.

(2). הקשת המודגשת (שבתוך המלבן) מחוברת, אזי כדי שיתקבל עץ פורש יש "לוותר" על קשת אחד במלבן הימני ועל קשת אחת במלבן השמאלי, מספר האפשרויות לכך הוא: $3\cdot 3=9$.

מאחר ששני המקרים הללו זרים, וכוללים את כל האפשרויות, ל- G_3 **<u>15</u> עצים פורשים**.

ג. כמה עצים פורשים יש ל- G_n ?

נבנה נוסחת נסיגה המתאימה לתוכן הבעיה. נגדיר: a_n - מספר העצים הפורשים שיש ל G_n.

נניח של- G_n יש a_n עצים פורשים. לכל עץ פורש כזה ניתן להוסיף בקצה הימני את ה"תוספות" הבאות כדי לקבל עץ פורש של G_{n+1}: 1. 2. 3.

ולכן עד כה מצאנו $3a_n$ אפשרויות.

אולם ניתן גם להוסיף את ה"תוספת" הבאה:

ההבדל הוא שאת "תוספת" זו ניתן להוסיף רק לעצים פורשים של G_n שאין להם את הקשת הימנית ביותר (המאונכת) כדי שלא ייווצר מעגל. כאלו יש: $2a_{n-1}+2a_{n-2}+2a_{n-3}+\dots$.

קיבלנו: $a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}+2a_{n-2}+2a_{n-3}+\dots$.

נציב n-1 ונקבל: $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}+2a_{n-3}+2a_{n-4}+\dots$.

נחסר את המשוואות ונקבל: $a_{n+1}-a_n=3a_n-a_{n-1}$.

לכן כלל הנסיגה הוא:
$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n-a_{n-1} \\ a_0=0 \\ a_1=1 \end{cases}$$

כעת נמצא לסדרה ביטוי מפורש. הפולינום האופייני הוא: $x^2-4x+1=0$.

שורשיו הם: $2\pm\sqrt{3}$, ולכן הסדרה היא מהצורה הבאה: $a_n=\alpha\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\beta\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

למציאת α,β יש להציב את שני תנאי ההתחלה, וכך מקבלים:

$$\underline{a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^n}$$