

פרופי י. רוזיטקי

משך הבחינה: 3 שעות וחצי השעה.
להוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר, אסור.

בבחינה 4 שאלות. עליכם לענות על כל השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה (30%).
הציון הסופי יחשב לפי שלש התשובות שלהן ניתן הניקוד המירבי + ניקוד התשובה הרביעית מחולק ב-3.
רשמו תשובות מלאות ומנומקות.
תשובות לשאלות שונות יש להתחיל בעמוד חדש.

הסמלים R, Q, Z, N מייצגים את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונלים והממשיים, בהתאמה.

1. (א) הוכח או הפרך: (פרט את כל נימוקך).

$$\lambda x \in R e^x \in \{g \in R \rightarrow R : \forall y \in \{x \in R : x > 0\}. y \in \{g(x) : x \in R\}\}$$

(ב) כיתבו את הפסוק הבא ללא סימני שלילה:

$$\neg(\exists \varepsilon > 0 (\forall \delta > 0 (\exists x > 0 (\exists y > 0 (|x-y| < \delta \wedge |x-y| > \varepsilon))))))$$

(א) תהי a_1, a_2, \dots, a_n , תמורה כלשהי של המספרים $1, 2, \dots, n$. n הוא מספר טבעי אי-זוגי. הוכיחו כי המכפלה: $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ היא זוגית.

2. (א) (12%) על Z נגדיר שני יחסים: S, T כך ש- $k \in S \Leftrightarrow k \in T$ מתחלק ב- k וכן $k \in T \Leftrightarrow k \in S$ מתחלק ב- $k+1$.

הוכח או הפרך: (I) S הוא יחס שקילות.

(II) T הוא יחס שקילות.

(III) $S \cup T$ הוא יחס שקילות.

(ב) (8%) בכל אחד מהמקרים בהם הייתה תשובתכם "נכון", מצאו את עוצמת קבוצת המנה.

(ג) (3%) מהי עוצמת הקבוצה: $Q \rightarrow (N \rightarrow \{2, 3\})$? הסבירו!

(ד) (7%) נגדיר: $A = \{ f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}. f(f(k)) = f(k) \}$. מהי העוצמה $|A|$? הסבירו!

3: (א) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים (זהים) ו- r כדורים צבעוניים (ב- n צבעים שונים, ללא לבן) ל- 2 תאים כך שבכל תא יהיה לכל היותר כדור צבעוני אחד (אך יתכנו מספר כדורים של כל צבע).

(ב) בכמה דרכים ניתן לחלק 50 כדורים זהים לשלשה תאים כך שבתא הראשון יהיו פחות מ- 10 בתא השני פחות מ- 30 ובתא השלישי פחות מ- 20 ?

(ג) נתונה נוסחת הנסיגה הבאה. רשום ביטוי מפורש של a_n

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 2^n + n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

4. (א) (10%) בכמה עצים ממוספרים על n צמתים יש בדיוק $3-n$ עלים?

(ב) (8%) יהי G גרף פשוט על $n \geq 3$ צמתים. הוכיחו כי אם $d(v) \geq (n+1)/2$ לכל צומת v , אזי יש ב- G משולש.

(ג) (6%) יהי T עץ אשר דרגות כל צמתיו אי-זוגיות. הוכיחו כי מספר הקשתות בו גם אי-זוגי.

(ד) (6%) יהי G גרף פשוט שלו n צמתים ו- $n+12$ קשתות. דרגתו המינימלית לפחות 3 . הוכיחו כי $n \geq 24$.

$$\sum d(v) = 2|E|$$

הוכחה!

$$3(n+12) \leq 2n$$

$$3n + 36 \leq 2n$$

$$3n \leq 2(n+12)$$

$$n \leq 24$$