הצעת פתרון למבחן במתמטיקה בדידה 2.3.2001

שאלה 1

א. נוכיח טענה זו:

$$\left(\lambda x\in R.e^x\right)\in\left\{g\in R\to R:\forall y\in\{x\in R:x>0\}.y\in\{g(x)|x\in R\}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall y\in\{x\in R|x>0\}.y\in\{e^x|x\in R\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall y\in R^+.y\in\mathrm{Im}\left(e^x\right)\Leftrightarrow\forall y\in R^+.\exists x\in R.y=e^x$$

הפונקציה: $\ln x:R^+\to R$ מוגדרת לכל ממשי חיובי, ולכן קיים x כנדרש. ניתן לקחת $x=\ln y$,

ועבורו בבירור מתקיים: $y=e^x=e^{\ln y}=y$. על כן הטענה <u>נכונה</u>.

ב. נכתוב את הביטוי הבא ללא סימני שלילה:

$$\neg\left(\exists\varepsilon>0\left(\forall\delta>0\left(\exists x>0\left(\exists y>0\left(|x-y|<\delta\wedge|x-y|>\varepsilon\right)\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\left(\exists\delta>0\left(\forall x>0\left(\forall y>0\left(|x-y|\geq\delta\vee|x-y|\leq\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

ג. <u>צ.ל</u>: המכפלה $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ היא זוגית.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי המכפלה אי-זוגית, אזי כל אחד מגורמי המכפלה אי-זוגי, שכן די אם יש באחד הגורמים את הגורם הזוגי 2 אזי המכפלה כולה זוגית.

כל גורם הוא אי-זוגי, כלומר לכל i מתקיים ש- a_i-i **אינו** מתחלק ב-2. אזי: אם i זוגי אז a_i אי-זוגי, ואם i אי-זוגי אז a_i זוגי.

ידוע ש- n אי-זוגי, לכן ישנם $(n+1)/2$ i-ים אי-זוגיים, לכן $(n+1)/2$ a_i-ים זוגיים.

באופן דומה ישנם $(n-1)/2$ i-ים זוגיים, לכן $(n-1)/2$ a_i-ים אי-זוגיים.

אבל נתון ש- a_i הם תמורה של 1 עד n ו- n אי-זוגי אזי יש $(n+1)/2$ a_i-ים זוגיים ו- $(n-1)/2$ a_i-ים אי-זוגיים. קיבלנו סתירה. לכן **מ.ש.ל.**

שאלה 2

א. טענות I + III נכונות ואילו II אינה נכונה. נראה זאת:

<u>S הוא יחס שקילות</u>. כדי להראות זאת יש להראות שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

- *רפלקסיבי* - בבירור מתקיים $\forall x.xSx$, כי $x-x=0|11$. 0 מתחלק בכל מספר.
- *סימטרי* - נניח xSy, אזי $(x-y)|11$. אם מספר מתחלק ב-11 אז גם הנגדי לו מתחלק ב-11, לכן $(y-x)|11$ ומכאן: ySx.
- *טרנזיטיבי* - נניח $xSy \wedge ySz$ אזי $(x-y)|11$ וגם $(y-z)|11$. סכום של מספרים שמתחלקים ב-11 גם הוא מתחלק ב-11, לכן $(x-z)|11$ ומכאן xRz.

<u>T אינו יחס שקילות</u>.

דוגמה נגדית- בבירור לא מתקיים $1T1$ כי 2 אינו מתחלק ב-11, וזוהי סתירה לרפלקסיביות.

$S\cup T$ <u>יחס שקילות</u>.

ניתן להראות כי היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי בדומה ליחס S.

אולם ניתן גם לטעון כי איחוד של יחס שקילות עם כל יחס אחר נותן יחס שקילות,כי:

$x(S\cup T)y \Leftarrow xSy$.

ב. S הוא יחס שקילות, ועוצמת קבוצת המנה של היחס S היא **11**. זאת מאחר שכל המספרים שמתחלקים ב-11 מהווים מחלקת שקילות. כל המספרים שנותנים שארית 1 מחלוקה ב-11, גם הם מהווים מחלקת שקילות... וכך הלאה עד 10.

$S\cup T$ הוא גם יחס שקילות, כאמור, ועוצמת קבוצת המנה של יחס זה היא **6**. זאת מאחר שכל המספרים שמתחלקים ב-11 מהווים מחלקת שקילות. כל המספרים שנותנים שארית 10 או שארית 1 מהווים מחלקת שקילות. כך גם אלו שנותנים שארית 9 או 2. אלו שנותנים שארית 8 או 3 מהווים מחלקת שקילות. אלו שנותנים שארית 7 או 4 מהווים מחלקת שקילות. כך גם לגביי 6 ו-5.

ג. נשתמש באריתמטיקה של עוצמות:

ידוע שעוצמת הרציונליים ועוצמת הטבעיים הן $\aleph_0$.

אזי:

$$|\mathbf{Q}\to(\mathbf{N}\to\{2,3\})|=|\mathbf{N}\to\{2,3\}|^{|\mathbf{Q}|}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=\aleph$$

ד. ראשית, ברור כי מתקיים: $A \subseteq N^N$, לכן: $|A| \le |N^N| = \aleph$. נתבונן בקבוצה הבאה:

$$B = \{ f : N \to N \mid \forall k. f(2k) = (2k+1) = 2k \lor f(2k) = f(2k+1) = 2k+1 \}.$$

קל לראות כי $B \subseteq A$, וכמו כן נתבונן בהעתקה הבאה:

$$H : P(Neven) \to B$$

$$H(X) = \lambda n. \begin{cases} 2n & (n \in Neven \land n \in X) \lor (n \in Nodd \land n+1 \in X) \\ 2n+1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

העתקה זו היא חח"ע ועל, לכן: $|A| \ge |B| = |P(Neven)| = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

לפי משפט קנטור-ברנשטיין: $|A| = \aleph$.

שאלה 3

א. ראשית נבחר את n התאים מתוך 2n התאים בהם יהיו כדורים צבעוניים.
לאחר מכן נסדר את הכדורים הצבעוניים בתאים שנבחרו.
ואז נסדר n כדורים זהים ב- 2n התאים בסדר כלשהוא. על כן:

$$\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot S(2n,n) = \binom{2n}{n} n! \binom{3n-1}{2n-1}$$

ב. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה, ונקבל:

$$\binom{50+3-1}{3-1} - \binom{40+3-1}{3-1} - \binom{20+3-1}{3-1} - \binom{30+3-1}{3-1} + \binom{10+3-1}{3-1} + \binom{20+3-1}{3-1} + \binom{3-1}{3-1} - 0 =$$

$$= \binom{52}{2} - \binom{42}{2} - \binom{32}{2} + \binom{12}{2} + 1$$

ג. נמצא את נוסחת הנסיגה:

הפולינום האופייני הוא: $x^2 - 3x + 2 = 0$, ושורשיו הם 2 ו- 1.

לפי צורת כלל הנסיגה נסיק כי צורת האיבר הכללי היא: $a_n = (an+b)2^n + (cn^2 + dn + e)$.

נציב את החלק שקשור ל- 2^n ונקבל:

$$[a(n+2)+b]2^{n+2}=3[a(n+1)+b]2^{n+1}-2(an+b)2^n+2^n$$

$$(an+2a+b)4=6(an+a+b)-2(an+b)+1$$

$$2an+4a+2b=3an+3a+3b-an-b+\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2}$$

כעת נציב את החלק האחר מכלל הנסיגה, ונקבל:

$$[c(n+2)^2+d(n+2)+e]=3[c(n+1)^2+d(n+1)+e]-2[cn^2+dn+e]+n$$

$$cn^2+4cn+4c+dn+2d+e=3cn^2+6cn+3c+3dn+3d+3e-2cn^2-2dn-2e+n$$

$$c=2cn+d+n$$

$$\Rightarrow c=d$$
$$\Rightarrow 2c+1=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

נותר למצוא את b ואת e וזאת נעשה ע"י שני האיברים הראשונים:

$$a_0=b+e=1$$
$$a_1=2a+2b+c+d+e=2b+e+1-1=2 \Rightarrow 2b+e=2$$

משתי משוואות אלה, נקבל: $b=1$, $e=0$

ולכן: $$\underline{a_n=\left(\frac{1}{2}n+1\right)2^n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n}$$

שאלה 4

א. מספר העצים הממוספרים על n צמתים ומספר העלים בהם הוא n-3 הוא

$$\underline{\binom{n}{3}\cdot\left[3^{n-2}-3\cdot 2^{n-2}+3\right]}$$

ראשית נבחר 3 עלים מבין n הצמתים.

לאחר מכן יש למצוא כמה אפשרויות יש למחרוזות באורך n-2 מעל 3 העלים שנבחרו.

נעשה כאן שימוש **בעיקרון ההכלה וההפרדה**.

ב. נניח בשלילה כי אין משולש. אזי ניקח v_1, v_2 שמחוברים בקשת. בהכרח לא קיים צומת שהוא שכן של שניהם כי אז נסגר מעגל. וקיבלנו: $\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}=n+1$. כלומר יש לפחות n+1 צמתים בגרף, וזוהי כמובן סתירה. **מ.ש.ל.**

ג. T הוא עץ אשר דרגות כל צמתיו אי-זוגיות.

נסמן ב- d_i את דרגות הצמתים. אזי לפי הנוסחה הבאה: $2|E|=\sum_{1\le i\le n} d_i$ עולה, שסכום הדרגות הוא $\sum_{1\le i\le n} d_i$ זוגי, הרי הוא כפולה של 2 במספר הקשתות, שהוא מספר טבעי.

ידוע, שאם מחברים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים מקבלים מספר זוגי, ואילו אם מחברים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים, מקבלים מספר אי-זוגי.

על כן, על מנת שנחבר את ה- d_i - ים האי-זוגיים, ונקבל מספר זוגי, צריך להיות מספר זוגי של מחוברים, כלומר n זוגי.

בעץ בעל n קודקודים יש בדיוק n-1 קשתות, וזהו כמובן מספר אי-זוגי. **מ.ש.ל.**

ד. קל להוכיח טענה זאת ע״י החישוב הבא:

$$3n=3|V|\le\sum_{1\le i\le n} d_i=2|E|=2(n+12)=2n+24$$
$$3n\le 2n+24$$
$$n\le 24$$

מ.ש.ל.