הצעת פתרון מבחן במתמטיקה בדידה 22.6.2001

פתרון שאלה מס' 1

א. נתון: A,B קבוצות. $B \subseteq A \times P(A)$

צ.ל: $\left(\exists a \in A.\left|\{S \subseteq A \mid (a,S) \in B\}\right| > 1\right) \vee \left(\exists S \subseteq A.\{a \in A \mid (a,S) \in B\} = \phi\right)$

הוכחה: נכנה את הביטוי שמימין Q ואת זה שמשמאל P, ועלינו להוכיח $P \vee Q$.

נניח **בשלילה** כי שני הביטויים שקריים, כלומר: $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$ ונגיע לסתירה.

$Q \equiv False \Leftarrow \forall S \subseteq A.\{a \in A \mid (a,S) \in B\} \neq \phi$ (*).

נגדיר פונקציה $f : P(A) \to A$. פונקציה זו מחזירה לכל קבוצה חלקית של A: $X \in P(A)$

נציג מקבוצת איברי A שמתייחסים ל-X ביחס B. קיים לפחות איבר אחד כזה לפי (*).

כעת, נתבונן בהעתקה הבאה:

$$H : P(A) \to B$$
$$H(x) = (f(x), x)$$

זוהי בהכרח העתקה חד-חד ערכית, כי:

$H(x_1) = H(x_2) \Rightarrow (f(x_1), x_1) = (f(x_2), x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

מאחר שההעתקה H היא חד-חד ערכית נסיק: $|P(A)| \leq |B|$. (1)

$P \equiv False \Leftarrow \forall a \in A.\left|\{S \subseteq A \mid (a,S) \in B\}\right| \leq 1$. (**)

נתבונן בהעתקה $G : B \to A$ המחזירה לכל $(x,y) \in B$ את y שהוא איבר מתאים מ-$P(A)$.

מ (**) עולה בבירור שהעתקה זו היא חד-חד ערכית, ומכאן: $|B| \leq |A|$. (2)

מ- (1) ומ- (2) קיבלנו: $|P(A)| \leq |B| \leq |A| \Rightarrow |P(A)| \leq |A|$.

הנ"ל בא בסתירה **למשפט קנטור**, לפיו לכל קבוצה A מתקיים $|P(A)| > |A|$ (גדול ממש).

הגענו לסתירה, ולכן לפחות אחת מהטענות P,Q חייבת להיות אמת. **מ.ש.ל.**

ב. נתון: A,B קבוצות.

צ.ל: $\left|P(B)^A\right| = \left|P(A)^B\right|$

הוכחה: נשתמש באריתמטיקה של עוצמות.

$$\left|P(B)^A\right| = |P(B)|^{|A|} = \left(2^{|B|}\right)^{|A|} = 2^{|B|\cdot|A|} = 2^{|A|\cdot|B|} = \left(2^{|A|}\right)^{|B|} = |P(A)|^{|B|} = \left|P(A)^B\right|$$

קומוטטיביות

מ.ש.ל.

פתרון שאלה מט' 2

א. טענה: לכל $f: A \to B$ הפונקציה $g: A \to A \times B$ המוגדרת ע"י $g(x) = (x, f(x))$ היא חח"ע ועל.

הטענה **אינה נכונה**. אפריך אותה באמצעות הדוגמה הבאה:

ניקח $A, B = \Re$ והפונקציה: $f(x) = 7$, אזי $g(x) = (x, 7)$.

קל לראות כי הפונקציה g אינה פונקצית על. למשל – לא קיים מקור $x \in R$ עבורו $g(x) = (2,5)$, שכן החלק הימני של הזוג הסדור הוא תמיד 7.

הערה: יחד עם זאת, ניתן להראות כי הפונקציה g היא פונקציה חח"ע, כך:

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ב. נתון: $A = \{f : N \to \{0,1\} | \neg\exists k \in N. f(k) = f(k+1) = 0\}$

צ.ל: $|A| = ?$

פתרון: ראשית, ברור כי $A \subseteq \{0,1\}^N$, ולכן: $|A| \le \left|\{0,1\}^N\right|$.

$$\left|\{0,1\}^N\right| = |\{0,1\}|^{|N|} = 2^{\aleph_0} = \aleph \Rightarrow |A| \le \aleph$$

כמו-כן נתבונן בהעתקה הבאה:

$$H : P(N_{even}) \to A$$

$$H(X) = \lambda n \in N. \begin{cases} 0 & n \in X \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

זוהי העתקה **חח"ע**, שכן ניקח $X_1 \ne X_2 \Leftarrow$ בלי הגבלת הכלליות קיים $a \in N$ המקיים:

$a \in X_1 \wedge a \notin X_2 \Rightarrow (H(X_1))(a) = 0 \wedge (H(X_2))(a) = 1 \Rightarrow H(X_1) \ne H(X_2)$.

ההעתקה H מחזירה פונקציות השייכות ל- A, כי הפונקציות המוחזרות מחזירות 0, אם בכלל, במקומות הזוגיים בלבד, ולכן לא קיימים מקומות סמוכים שמחזירים 0 (וזהו התנאי של A).

לפי H חח"ע נובע ש: $|P(N_{even})| \le |A| \Rightarrow \aleph = 2^{\aleph_0} \le |A|$ (הרי $|N| = |N_{even}|$).

קיבלנו: $|A| \ge \aleph \wedge |A| \le \aleph$ ולפי **משפט קנטור-ברנשטיין**: $\underline{|A| = \aleph}$.

פתרון שאלה מס' 3

כמה מילים באורך k ניתן ליצור מהקבוצה $\{1,2,\ldots,k\}$ כאשר 1 מופיע מס' זוגי של פעמים ?

נבנה **פונקציה יוצרת** המתאימה לתוכן הבעייה.

נגדיר: a_n - מס' המילים באורך n כאשר 1 מופיע מס' זוגי של פעמים. $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$F(x)=\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right)\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots\right)^{k-1}$$

$$F(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot e^{x(k-1)}=\frac{1}{2}\left(e^{kx}+e^{(k-2)x}\right)$$

פונקציה זו יוצרת את הסדרה הבאה: $a_n=\frac{1}{2}\left[k^n+(k-2)^n\right]$.

לקבלת מספר המילים באורך k נציב $n=k$.

ולכן מס' המילים באורך k הוא: $\underline{a_k=\frac{1}{2}\left[k^k+(k-2)^k\right]}$.

פתרון שאלה מס׳ 4

א. נתון: a עוצמה ; $B\cap C=\phi$; $|B|=|C|=|B\cup C|=a$

צ.ל: $h=\lambda X\in P(C).X\cup B$ היא פונקציה חח״ע מ- $P(C)$ ל- $P_a(B\cup C)$.

הוכחה: תחום הפונקציה הוא $P(C)$, לפי אופן הגדרת הפונקציה.

נוכיח שהפונקציה חח״ע. ניקח $X_1,X_2\in P(C)$ $h(X_1)=h(X_2)$, ונראה כי $X_1=X_2$

$h(X_1)=h(X_2)\Rightarrow X_1\cup B=X_2\cup B$.

מהנתון $B\cap C=\phi$ ומכך ש- $X_1,X_2\in P(C)$ קל להסיק כי: $X_1\cap B=X_2\cap B=\phi$.

$X_1\cup B=X_2\cup B\Rightarrow (X_1\cup B)\setminus B=(X_2\cup B)\setminus B\Rightarrow X_1=X_2$ ולכן הפונקציה חח״ע.

נותר להראות מדוע הטווח הוא $P_a(B\cup C)$:

מובן, שמדובר בקבוצות חלקיות של $B\cup C$, כי הפונקציה מחזירה איחוד של B עם קבוצה חלקית כלשהי של C. תהי $X\in P(C)$.

$$(X\cup C)\subseteq(B\cup C)\Rightarrow|X\cup C|\leq|B\cup C|$$
$$(X\cup C)\supseteq C\Rightarrow|X\cup C|\geq|C|$$
$$\Rightarrow a=|C|\leq|X\cup C|\leq|B\cup C|=a$$

לפי משפט **קנטור ברנשטיין**: $\forall X\in P(C).|X\cup C|=a$ ולכן הטווח $P_a(B\cup C)$. **מ.ש.ל.**

ב. צ.ל: $C(2^{\aleph},2^{\aleph})=?$

פתרון: נשתמש במשפט הבא –

לכל עוצמה a המקיימת $a+a=a$ מתקיים $C(a,a)=2^a$. (*)

נוכיח כי $2^{\aleph}+2^{\aleph}=2^{\aleph}$. נתבונן בקבוצות הבאות: $A=P([0,1))$; $B=P([2,3))\setminus\{\phi\}$.

כל קטע על ציר הממשיים – עוצמתו $\aleph$. הורדה של מס׳ סופי של איברים מקבוצה אינסופית אינו משפיע על עוצמתה, ולכן: $|A|=|B|=2^{\aleph}$.

כמו-כן: $A\subseteq A\cup B\subseteq P([0,3))$, מאחר ש- $A\cap B=\phi$: $2^{\aleph}\leq|A|+|B|\leq 2^{\aleph}$, ולפי משפט **קנטור ברנשטיין** מתקיים: $|A|+|B|=2^{\aleph}$.

לפי אי-תלות במייצגים (חיבור עוצמות מוגדר היטב) נקבל ש- $2^{\aleph}+2^{\aleph}=2^{\aleph}$.

ובעזרת המשפט (*), נסיק: $\underline{C(2^{\aleph},2^{\aleph})=2^{(2^{\aleph})}}$

פתרון שאלה מס' 5

א. בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,...,19\}$ <u>אף</u> מספר זוגי <u>אינו</u> במקומו ?

נגדיר מאורעות עבור $i=1,2,...,9$ באופן הבא :

A_i - המספר $2i$ נמצא במקומו.

נשתמש **בעקרון ההכלה וההפרדה**.

$$\left|\bigcap_{i=1}^{9}A_i^c\right|=|U|-9|A_1|+\binom{9}{2}|A_1\cap A_2|-\binom{9}{3}\left|\bigcap_{i=1}^{3}A_i\right|+\binom{9}{4}\left|\bigcap_{i=1}^{4}A_i\right|-\binom{9}{5}\left|\bigcap_{i=1}^{5}A_i\right|+\dots$$

$$+\binom{9}{6}\left|\bigcap_{i=1}^{6}A_i\right|-\binom{9}{7}\left|\bigcap_{i=1}^{7}A_i\right|+\binom{9}{8}\left|\bigcap_{i=1}^{8}A_i\right|-\binom{9}{9}\left|\bigcap_{i=1}^{9}A_i\right|=$$

$$=19!-9\cdot 18!+\binom{9}{2}\cdot 17!-\binom{9}{3}\cdot 16!+\binom{9}{4}\cdot 15!-\binom{9}{5}\cdot 14!+\binom{9}{6}\cdot 13!-\binom{9}{7}\cdot 12!+\binom{9}{8}\cdot 11!-10!$$

ב. בכמה עצים ממוספרים על n צמתים מספר העלים הוא בדיוק 3 ?

נתייחס אל השאלה <u>השקולה</u> :

כמה מחרוזות בנות $n-2$ איברים, ניתן להרכיב מהתווים $\{1,2,...,n\}$ כאשר בדיוק 3 מהתווים אינם מופיעים בהן ?

ראשית נבחר את שלושת העלים שלא יופיעו, ולכך יש $\binom{n}{3}$ אפשרויות.

נותרו $n-3$ תווים במחרוזת באורך $n-2$, ולכן קיים תו אחד שיופיע פעמיים.

נבחר את האיבר שיופיע פעמיים, לכך יש $n-3$ אפשרויות.

וכעת נסדר $n-2$ איברים, כאשר שניים מהם זהים, לכך יש $\frac{(n-2)!}{2}$

תשובה : $\underline{\frac{1}{2}\binom{n}{3}(n-3)(n-2)!}$

פתרון שאלה מס' 6

א. נתון: G גרף פשוט על n צמתים.

u,v צמתים שאין ביניהם קשת.

$$d(u),d(v)\ge\frac{n+k}{2} \quad ; \quad k\ge0$$

צ.ל: ל- u,v לפחות $k+2$ שכנים משותפים.

הוכחה: נתבונן בצמתים u,v. אין ביניהם קשת, כלומר הם מחוברים לצמתים אחרים, וכאלו ישנם $n-2$. סכום דרגותיהם של הצמתים u,v הוא לפחות: $2\frac{n+k}{2}=n+k$.

נניח **בשלילה**, כי ל- u,v יש פחות מ- $k+2$ שכנים משותפים.

כלומר יש להם לכל היותר $k+1$ שכנים משותפים, ומכאן לכל הפחות:

$n-2-(k+1)=n-k-3$ שכנים __לא__ משותפים.

אולם, סכום הדרגות הוא לפחות $n+k$ ולכן נותר לחבר אותם לכל היותר לעוד:

$n+k-2(k+1)=n+k-2k-2=n-k-2$ (צמתים)

הדבר בלתי אפשרי, שכן נותרו לא יותר מ- $n-k-3$ צמתים כאלו, ולפי עקרון שובך היונים יהיה לפחות צומת אחד נוסף משותף. סתירה, ולכן **מ.ש.ל.**

ב. צ.ל: קיים עץ על n צמתים ש- $d_1,d_2,...,d_n$ דרגותיו $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n}d_i=2n-2$

הוכחה: נוכיח את הטענה ה"דו-כיוונית".

$\Leftarrow$ נניח קיים עץ על n צמתים ש- $d_1,d_2,...,d_n$ דרגותיו. $|V|=n$. מאחר שזהו עץ, מתקיים:

$|E|=|V|-1 \Leftarrow |E|=n-1$. כעת נקבל: $\sum_{i=1}^{n}d_i=2|E|=2(n-1)=2n-2$ **מ.ש.ל.**

$\Rightarrow$ נניח: $\sum_{i=1}^{n}d_i=2n-2$. וישנם המספרים $d_1,d_2,...,d_n$ שלמים וחיוביים.

נבנה מחרוזת המכילה את תווים $\{1,...,n\}$. כל תו i המחרוזת תכיל d_i-1 פעמים.

ניתן כמובן לעשות זאת, שכן לכל i מתקיים $d_i>0$ (נתון).

תתקבל מחרוזת באורך: $\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)=\sum_{i=1}^{n}d_i-n=(2n-2)-n=n-2$.

מחרוזת באורך $n-2$ מהא"ב $\{1,...,n\}$ מייצגת עץ על n צמתים.

לכן קיים עץ על n צמתים ש- $d_1,d_2,...,d_n$ דרגותיו. **מ.ש.ל.**

- סוף -