הצעת פתרון למבחן במתמטיקה בדידה 13.9.2001

תשובה לשאלה מס' 1

תחילה נמצא מיהי הקבוצה B :

$$B=\bigcup_{x\in A}P(x)=P(\phi)\cup P(\{\phi\})\cup P(\{\phi,\{\phi\}\})=\{\phi\}\cup\{\phi,\{\phi\}\}\cup\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}=$$
$$=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

על כן הקבוצה B בת ארבעה איברים שונים.

M היא קבוצת כל היחסים הסימטריים והאי-רפלקסיביים על הקבוצה B.

מה עוצמת M ?

היחסים אי-רפלקסיביים, כלומר אף איבר אינו מתייחס לעצמו. בגלל הסימטרייה עלינו לקבוע עבור כל זוג איברים האם מתייחסים אחד אל השני או לא. ישנם $\binom{4}{2}=6$ זוגות כאלה, ולכל זוג יש 2 אפשרויות, לכן עוצמת הקבוצה M היא: $2^6=64$.

כעת יש למצוא את עוצמת קבוצת הפונקציות מ- M ל- M כך שאף איבר בהן אינו ערך הפונקציה של עצמו.

יש לשים לב, כי לא נדרש שהפונקציות תהיינה חח"ע או על, ולכן כל איבר יכול "לקבל" כתמונה כל אחד מ- 63 האיברים האחרים.

לכן עוצמת הקבוצה שנתבקשנו לחשב היא: $\underline{63^{64}}$.

תשובה לשאלה מס' 2

א. <u>צ.ל</u>: $\alpha+\alpha=\alpha$

<u>הוכחה</u>: נבחר A,B שתי קבוצות כלשהן **זרות** המקיימות: $|A|=|B|=\alpha$.

על כן: $|A\cup B|=\alpha+\alpha$ (מאחר שזהו איחוד זר).

נרצה להראות ש- $|A\cup B|=\alpha$. לשם כך נניח **בשלילה** כי- $\alpha+\alpha>\alpha$.

אזי לפי ההנחות מתקיים: $|A|=\alpha$; $|A\cup B|>\alpha$. נסמן $C=A\cup B$ כלומר $|C|>\alpha$.

לפי הנתון לכל קבוצה A וקבוצה C אם $A\subset C$ ו- $|A|=\alpha$ וכן $|C|>\alpha$ אזי $|C-A|>\alpha$.

ולכן עבור הקבוצה שהגדרנו C מתקיים: $\alpha<|C-A|=|(A\cup B)-A|=|B|=\alpha$.

וכך הגענו לסתירה ולפיכך מתקיים $\alpha+\alpha=\alpha$. **מ.ש.ל.**

ב. צ.ל: אם $A \subset C$ $|A| = \alpha$ $|C| > \alpha$ אזי $|C - A| = |C|$.

הוכחה:

ברור שמתקיים: $|C - A| \le |C|$.

נבחר $C - A \supset D$ כך ש- $|D| = \alpha$ (D קיימת כי היא התמונה של העתקה חח"ע מקבוצה בעוצמה α ל- $C - A$).

נחשב:

$$|C - A| = |(C - A) - D| + |D| = |(C - A) - D| + |D| + |A| = |C|$$

לפי סעיף א'

הוכחנו את הטענה, ולכן **מ.ש.ל.**

תשובה לשאלה מס' 3

א. הטענה אינה נכונה

הפונקציה $\lambda x \in R.\{x\}$ היא פונקציה שמקבלת מספר ממשי ומחזירה קבוצה שבה איבר אחד בלבד והוא x, כלומר זוהי פונקציה ששייכת לקבוצה $R \to P(R)$.

לעומת זאת הקבוצה $\{f \in R \to R | \forall x \in R. |f(x)| = 1\}$ היא קבוצה חלקית של $R \to R$ שהיא קבוצה זרה לקבוצה $R \to P(R)$, ולכן הפונקציה $\lambda x \in R.\{x\}$ אינה שייכת לקבוצה הנ"ל (הרי לכל איבר ב- R מותאמת קבוצה ולא איבר ב- R).

ב. הטענה אינה נכונה

הפונקציה $\lambda x \in R.3^x$ היא פונקציה מ- R ל- R, אולם היא אינה מקיימת את התנאי הבא:

$\exists y \in \{x \in R | x \le 0\}. y \in \{f(x) | x \in R\}$.

משמעותו של התנאי היא: קיים מספר y אי-חיובי ששייך לתמונה של הפונקציה (כלומר קיים מקור ש- y הוא תמונתו).

תנאי זה אינו מתקיים עבור הפונקציה הנדונה, שכן לכל x ל- 3^x יש ערך חיובי ממש.

ג. <u>הטענה נכונה</u>

עלינו להוכיח הכלה ממש, לכן ראשית נוכיח הכלה, ואחר-כך נראה שלא מתקיים שוויון.

תהי: $B \in P(\{3n|n \in N\})$ אזי: $B \subseteq \{3n|n \in N\}$.

עלינו להראות: $B \in \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{3k|k \in N\}|\}$. ואכן קל לראות שמתקיימים התנאים:

$B \in P(N)$ ואף מכך ש- $B \subseteq \{3n|n \in N\}$ נסיק: $B = B \cap \{3k|k \in N\}$ ומכאן $|B| = |B \cap \{3k|k \in N\}|$.

כעת נראה שאין שוויון בין הקבוצות. ניקח למשל את קבוצת המספרים הטבעיים N :

$N \notin P(\{3n|n \in N\})$ אולם: $N \in \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{3k|k \in N\}|\}$

כי: $N \cap \{3k|k \in N\} = \{3k|k \in N\}$ ו- $|N| = |N \cap \{3k|k \in N\}| = |\{3k|k \in N\}| = \aleph_0$ לפי ההעתקה החח"ע ועל- $n \mapsto 3n$.

תשובה לשאלה מס' 4

א. <u>צ.ל</u>: לכל צומת y מתקיים שדרגתו גדולה ממש ממספר הצמתים שדרגתם 1.

<u>הוכחה</u>: נסמן את דרגתו של הצומת y ב- $\deg(y) = k$, אזי ל-y מחוברים k צמתים.

עבור כל אחד מהצמתים האלו "ניצור" מסלול עד שנגיע לעלה. מסלול כזה קיים, שכן הגרף הוא סופי, וכמו כן עץ אינו מכיל מעגלים ולכן לא ייתכן ש"ניקלע" למעגל אינסופי.

בנוסף לכך בהכרח כל מסלול יגיע לעלה **שונה**. כי אם נניח בשלילה שיצאנו מ- y דרך שני צמתים שונים והגענו לאותו עלה אזי יש מעגל בגרף וזוהי סתירה להיותו עץ.

הראינו שבגרף ישנם לפחות k עלים, כלומר עוצמתה של קבוצת העלים גדולה או שווה לדרגת הצומת y. נשים לב כי הקבוצה $L = \{x | x \in V \wedge \deg(x) = 1\}$ היא בדיוק קבוצת העלים (לפי הגדרה – עלה בעץ הוא צומת שדרגתו 1). וכך הוכחנו שלכל y מתקיים $\deg(y) \geq |L|$. **מ.ש.ל.**

ב. נניח $|E| > \binom{n-1}{2}$ בגרף פשוט G שבו n צמתים.

נניח בשלילה שהגרף G אינו קשיר. אזי קיים צומת y שאינו מחובר בקשת לאף צומת אחר.

זאת אומרת שלכל היותר n-1 צמתים בעלי דרגה שונה מאפס.

בין n-1 צמתים אלה ניתן להעביר בגרף פשוט **לכל היותר** $\binom{n-1}{2}$ קשתות, הרי אין לולאות ואין

קשתות כפולות ו- $\binom{n-1}{2}$ מייצג הרי את מספר האפשרויות לבחור שני צמתים שונים מבין n-1

הצמתים.

אולם נתון ש- $|E| > \binom{n-1}{2}$ ולכן קיבלנו סתירה. **מ.ש.ל.**

תשובה לשאלה מס׳ 5

א. סה״כ ישנן $(2n)!$ תמורות אפשריות. עבור כל תמורה שבה n מימינו של 2n קיימת תמורה מקבילה בה מקומותיהם מוחלפים ואז n נמצא משמאלו של 2n.

על כן, מטעמי סימטרייה זו ב- $\frac{(2n)!}{2}$ מהתמורות המספר n נמצא לשמאלו של 2n.

ב. נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

מספר האפשרויות של הזוגות של 2,3 ו- 3,4 הוא !18 כי אנו מתייחסים לרצף 2,3,4 כאל איבר אחד.

מספר האפשרויות של כל הזוגות יחד הוא !17 כי אז 2,3,4 הם איבר אחד ו- 7,8 הוא איבר אחד ונותרו 15 מספרים נוספים. באופן זה נקבל:

$$20!-3\cdot 19!+18!+2\cdot 18!-17!$$

ג. ניעזר בשקילות של כל עץ למחרוזות באורך $n-2$ תווים. עלים אינם מופיעים במחרוזת, ולכן במחרוזת יופיעו ארבעה תווים בלבד. לבחירת תווים אלו לרשותינו $\binom{n}{4}$ אפשרויות.

כעת נבחר תו לכל מקום במחרוזת, אולם יש לשים לב שכל התווים שנבחרו חייבים להופיע. לכן נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. לכן התשובה היא:

$$\binom{n}{4}\cdot\left[4^{n-2}-4\cdot 3^{n-2}+6\cdot 2^{n-2}-4\right]$$

תשובה לשאלה מס' 6

$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ הפולינום האופייני הוא: $x-1$ ומאפס אותו 1 בלבד.

לכן: $a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n$.

$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$ הפולינום האופייני הוא: $(x-2)^2$ ומאפס אותו 2 (מריבוי 2 !!!).

לכן: $b_n = (\gamma n + \delta) \cdot 2^n$.

כדי שיתקיים $\forall n . a_n = b_n$ צריכים להתקיים התנאים הבאים: $\beta \cdot 2^n = \delta \cdot 2^n \Leftarrow \beta = \delta$ וכמו כן: $\alpha = 0$ ו- $\gamma = 0$. קיבלנו: $a_n = \beta \cdot 2^n$ ו- $b_n = \beta \cdot 2^n$.

נציב את $a_n = \beta \cdot 2^n$ בתנאי הנסיגה ונקבל: $\beta 2^n = \beta 2^{n-1} + 2^{n-1} \Leftarrow 2\beta = \beta + 1 \Leftarrow \beta = 1$.

לכן: $a_n = b_n = 2^n$ ותנאי ההתחלה הם: $\underline{a_0 = 1}$; $\underline{b_0 = 1}$; $\underline{b_1 = 2}$