

מועד בי סמי בי תשס"ב  
מועד בי סמי אי תשס"ב  
תאריך הבחינה : 13.9.2002

## מבחן במתמטיקה בדידה

מורים: ד"ר דר, פרופ' הירשפלד, פרופ' טרסי, פרופ' רודיטי

סימונים: N, Q, R יסמנו את קבוצות המספרים הטבעיים, הרציונלים והממשיים בהתאמה.

משך הבחינה: שלוש שעות

- כללי - הבחינה : 1. מותר להשתמש בכל חומר עזר.  
2. בבחינה 6 שאלות. תשובה נכונה מזכה את הכותב ב- 20% .  
למניית הנקודות הסופי תילקחנה 4 שאלות שלהן הניקוד המרבי. ניקוד שתי השאלות הנותרות יסוכם, יחולק ב-2-ויתווסף לסך הנקודות שנצברו ב- 4 השאלות הקודמות.

נא לקרוא בעיון את השאלות!

ב ה צ ל ח ה !

## שאלה 1

א. בדקו אם הטעון הבא תקף:  
A יעזור ל-B אם B ישאר בארץ. C יעזור ל-B אם B יתחיל ללמוד.  
B יתחיל ללמוד. מכאן נובע ש-A: יעזור ל-B או C לא יעזור B.

ב. נסמן X - הפסוק: "אזכה בהגרלה"  
Y - הפסוק: "אקנה כרטיס הגרלה"  
Z - הפסוק: "יהיה לי פנאי".  
הצרינו המשפט הבא וקבעו ערך אמת שלו עבור המקרה ש-X - אמיתי,  
Y - שקרי ו-Z - אמיתי.  
(אזכה בהגרלה) אם ורק אם (יהיה לי פנאי ולא אקנה כרטיס הגרלה).

## שאלה 2

א. תהי  $P$  - קבוצה של נקודות במישור.  $L$  - קבוצה של ישרים. נגדיר שתי אקסיומות:

1. דרך כל שתי נקודות שונות עובר ישר יחיד.
2. כל שני ישרים שונים נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

יהי  $l \in L$  ישר ותהי  $Q \in P$  כאשר:  $Q \notin l$ .  
נגדיר  $L_Q$  - קבוצת הישרים העוברים דרך  $Q$ .  
 $P_l$  - קבוצת הנקודות על הישר  $l$ .  
הוכיחו כי:  $|L_Q| = |P_l|$ .

ב. יהי  $S$  יחס מעל  $R \times R$  המוגדר באופן הבא:  
 $(x, y)S(z, w)$  אם: קיים מספר שלם  $t$  כך ש-  $x - z = 3t$ ,  $y - w = 5t$ .  
1. הוכיחו כי  $S$  יחס שקילות.  
2. מהן מחלקות השקילות של  $(3, 5)$  ושל  $(0.2, 0.5)$ ?

## שאלה 3

א. נגדיר:  $Z_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .  
חשבו (שלא באמצעות כללי אריתמטיקה של עוצמות) את  $Z_{10}^N$ .

ב. תהיינה  $a, b$  עוצמות כלשהן. הוכיחו:  
1. לא ייתכן ש-  $a > b$  וגם  $a < b$  בו זמנית.  
2. אם גם  $c$  עוצמה כלשהי כך ש-  $a < b$  וגם  $b < c$  אזי  $a < c$ .

ג. תהיינה  $a, b$  עוצמות. הוכיחי כי אם  $a > 0$  אזי:  $ab \geq b$ .

#### שאלה 4

א. (5%) תהי  $A = \{0,1,\dots,9\}$ . הוכיחו שלכל בחירה של  $B \subset A$ ,  $|B| = 6$  יהיו ב-  $B$  לפחות שני אברים שסכומם 9.

ב. (11%) נתונה נוסחת הנסיגה:  $\lambda n.a_n$

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n \\ a_0 = 1, a_1 = -1 \end{cases}$$

רשמו נוסחה מפורשת ל-  $a_n$ .

ג. (4%) על מדף בספרייה ישנם 30 ספרים. מתוכם 15 עותקים זהים של ספר במתמטיקה בדידה, ו-15 ספרים שונים זה מזה בחדו"א. בוחרים 15 ספרים מן המדף ללא חשיבות לסדר. בכמה בחירות ישנם בדיוק  $k$  ספרים בחדו"א? ( $0 \leq k \leq 15$ ).

#### שאלה 5

א. מטילים  $n$  קוביות (שונות). מהו מספר התוצאות האפשריות בהן מופיע כל אחד מהמספרים  $1,2,\dots,6$  לפחות פעם אחת?

ב. רשמו נוסחת נסיגה (והסבירו) של הסדרה  $\lambda n.a_n$  המוגדרת ע"י:  
נתונים  $n$  ישרים במישור כך שכל אחד חותך את כל השאר אך אין שלושה העוברים דרך אותה נקודה.

נסמן ב-  $a_n$  ( $n \geq 0$ ) את מספר האזורים הנוצרים מ-  $n$  הישרים, במישור.

ג. הוכיחו ע"ש שיקולים קומבינטוריים כי:  
$$\binom{n+m+k}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + \binom{k}{2} + nm + nk + mk$$

ד. הוכיחו כי הביטוי  $\binom{2n}{n}$  תמיד מספר זוגי לכל  $n$  מספר טבעי.

#### שאלה 6

א. הוכיחו: אם נצבע את קשתות הגרף השלם  $K_n$  בשני צבעים בצביעה כלשהי אזי לפחות אחד מתת-הגרפים החד-צבעיים (שכל קשתותיו באותו הצבע), קשור.

ב. מיהו העץ המסומן המותאם למילה:  $(1,3,4,4,5,6,6,6)$  לפי הוכחת משפט קילי כפי שנלמדה בכיתה.

ג. יהי  $G$  גרף פשוט. הוכיחו כי אם יש בו שני צמתים  $x, y$  סמוכים (כלומר יש ביניהם קשת) כך, ש-  $d(x) + d(y) \geq n$  אזי  $\chi(G) \geq 3$ . (כלומר לא ניתן לצבוע את צמתיו בצביעה חוקית עם שני צבעים בלבד).