

סמסטר א' תשס"ד
מועד א' 20.02.04

מתמטיקה בדידה
א. אברון, י. הירשפלד, י. רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

גליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתובת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.

כמקובל, האותיות N, R ו- Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.

בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות. ערך מכסימלי לתשובה **נכונה** לשאלה הוא 20%. למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתיים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.

1. א. הוכיחו כי חיבור עוצמות מוגדר היטב.

ב. תהיינה a, b עוצמות. הוכיחו כי: $a \leq b$ אם **אם** קיימת עוצמה c כך ש- $a + c = b$.

2. קבוצה A תקרא **תקינה** אם $|A| + |A| = |A|$.

א. הוכיחו כי אם A קבוצה אינסופית ותקינה, וכן B קבוצה שאינה סינגלטון, אזי הקבוצה $A \rightarrow B$ היא קבוצה תקינה.

ב. האם (א) נכון **ללא** התנאי ש- A אינסופית?

ג. הוכיחו כי יש אינסוף קבוצות תקינות שאף שתיים מהן אינן שוות עוצמה.

3. רשמו נוסחת נסיגה והציגו פתרון מפורש לבעיה הבאה:

תהיינה $B = \{ \emptyset, N, R \}$, $A(n) = \{ 1, 2, \dots, n \}$. כמה פונקציות מ- $A(n)$ ל- B יש כך ש-:

$$\forall k \in A(n). f(k) \neq \emptyset \rightarrow f(k+1) \neq f(k).$$

(רמז: למעשה תרגיל מתרגילי הבית !!!)

4. א. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $P(A \setminus B) \setminus (P(A) \setminus P(B)) = \{ \emptyset \}$.

ב. הראו כי הביטוי הבא מוגדר היטב וחשבו את ערכו:

$$(\lambda A \in P(N), B \in P(N). \cup x. x \in (P(A \setminus B) \setminus (P(A) \setminus P(B))))(N, N_{\text{even}})$$

5. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה :

$$\{ f : \{ n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 100 \} \rightarrow \{0,1,2,3,4\} \mid |f^{-1}[\{1\}]| \geq 1 \wedge |f^{-1}[\{2\}]| \geq 1 \wedge |f^{-1}[\{3\}]| \geq 1 \}$$

6. א. יהיו $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ עצים כך ש- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. יהיו :
 $a \in V_1, b \in V_2$ נגדיר גרף G באופן הבא :

$$G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{a,b\}\} \rangle$$

הוכיחו כי G עץ.

ב. יהי $G = \langle V, E \rangle$ כך ש- $V = P_2(\{1,2,\dots,n\})$, $E = \{ \{A,B\} \in P_2(V) \mid A \cap B = \emptyset \}$.

חשבו את $|V|$ וכן את דרגת כל קודקוד (צומת) ב- V .

בהצלחה!