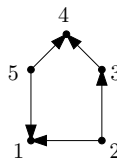


# בוחרן במתמטיקה בדידה

2004/4/23

מרצה: עודד רגב  
משך הבוחן: שעתיים  
אסור השימוש בכל חומר עזר  
הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט

1. (א) כמה אברים יש ל- $\{\{\phi\}\}$ ? ל- $\{\phi, \{\phi\}\}$ ?  
(ב) האם מתקיים  $\phi \subseteq \{\phi\}$ ?  $\phi \in \{\{\phi\}\}$ ?  
(ג) רשום את  $P(\{\phi, \{\phi\}\})$ .  
(ד) הוכח או הפרד: לכל שתי קבוצות  $A, B$  מתקיים  $\phi = (P(A \cup B) \setminus P(A)) \setminus P(B)$ .
2. נגיד שפונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  היא פונקציה חסומה אם קיים  $k \in \mathbb{N}$  כך ש- $\{0, 1, \dots, k\}$  הוא טווח של  $f$ .  
(א) הצרן את הפסוק " $f$  היא פונקציה חסומה" ושולל אותו.  
(ב) תן דוגמא לפונקציה חסומה ולפונקציה לא חסומה (ניתן להשתמש בסימון למדא).  
(ג) נגדיר את קבוצת כל הפונקציות החסומות  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  כ- $A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ חסומה}\}$ . נגיד שפונקציה  $f$  גדולה מפונקציה  $g$  אם לכל  $i \in \mathbb{N}$  מתקיים  $f(i) > g(i)$ . הצרן את הביטוי: "לכל איבר  $f \in A$  קיים איבר  $g \in A$  שגדול ממנו".  
(ד) הוכח את הביטוי מהסעיף הקודם.
3. היחס  $R$  על הקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  מתואר בדיאגרמה הבאה:



- (א) האם זהו יחס רפלקסיבי? אנטי-רפלקסיבי? סימטרי? אנטי-סימטרי? טרנזיטיבי? נמק את תשובותיך.  
(ב) יהי  $S$  יחס כלשהו על קבוצה  $A$ . הסגור הסימטרי שלו הוא היחס על הקבוצה  $A$  המוגדר על ידי:

$$\{(a, b) \in A \times A \mid aSb \vee bSa\}.$$

שרטט את הסגור הסימטרי של היחס  $R$ .

- (ג) הוכח שלכל יחס  $S$ , הסגור הסימטרי של  $S$  הוא יחס סימטרי.  
(ד) יהי  $S$  יחס סדר מלא על קבוצה  $A$ . מה הוא הסגור הסימטרי שלו?  
4. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  פונקציה על. נגדיר יחס  $R$  על  $\mathbb{R}$  ע"י  $xRy$  אם  $f(x) \cdot f(y) > 0$ .

- (א) הוכח ש- $R$  הוא יחס שקילות על  $\mathbb{R}$ .  
(ב) מצא את קבוצת המנה  $\mathbb{R}/R$ . כמה מחלקות שקילות קיימות?  
(ג) איך היתה משתנה תשובתך לסעיף הקודם אם  $f$  לא היתה פונקציה על?

בהצלחה!!!