בקודר

7. א. לקבוצה $\{\{\emptyset\}\}$ ישנו איבר אחד והוא $\{\emptyset\}$

לקבוצה $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ ישנם שני איברים והם: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$

ב. מתקיים $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ משום שקבוצה הריקה מוכלת/שווה בכל קבוצה.

נזכיר שלפי הגדרה, הוא התנאי הבא: $A \subseteq B \iff (\forall a\in A \rightarrow a\in B)$

והחלק הראשון של הגרירה תמיד F (משום שאין שום איבר בקבוצה הריקה)

לכן זה הביטוי נכון.

לא מתקיים $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ משום ש $\emptyset$ לא איבר בקבוצה. האיבר היחיד $\{\emptyset\}$ כלומר בקבוצה שהאיבר בה הוא הקבוצה הריקה.

ג. $P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

ד. נפריך. $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ $P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$ $P(B)=\{\emptyset,\{2\}\}$

$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$(P(A\cup B)\setminus P(A))\setminus P(B) = \{\{1,2\}\} \neq \emptyset$.

לכן המשפט אינו נכון.

2. א. נתרגם את הפסוק:

$\exists k\in N. \forall x\in N. f(x)\in\{n\in N \mid n\le k\}$

(כלומר $f(x)\le k$)

נשלול את הפסוק:

$\forall k\in N. \exists x\in N. f(x)\notin\{n\in N \mid n\le k\}$

ב. דוגמא לפונקציה חסומה:

$f:N\to N$ $f(x)=0$. נראה שהפונקציה חסומה, ניקח $k=0$

לכל $x\in N$ $f(x)=0 \Rightarrow f(x)\in\{n\in N \mid n\le 0\}$

כלומר הרכיב הימני של הביטוי נכון לכן f חסומה.

דוגמא לפונקציה לא חסומה:

$f:N\to N$ $f(x)=x$. נראה שהיא איננה חסומה!

נניח בשלילה ש f חסומה, כלומר קיים k כך שלכל x

$f(x)\in\{n\in N \mid n\le k\}$. ניקח $x=k+1$ ו $f(x)=k+1$.

$k+1\notin\{n\in N \mid n\le k\}$ וזו סתירה לכן הפונקציה איננה חסומה.

ג. נתרגם. נגדיר קודם

$A=\{f:N\to N \mid f \text{ חסומה}\}$

נתרגם:

$\forall f\in A. \exists g\in A. g>f$

לא מספיק. יש לתרגם גם דרך להגדרה.

ד. נוכיח. נוכיח זאת עבור f כללית.

יהי $f\in A$. מהנתון נובע f חסומה כלומר

$\exists k\in N. \forall x\in N\ f(x)\le k$ נגדיר את הפונקציה g הבאה:

$g:N\to N$. $g(x)=k+1$. ראשית נראה ש g חסומה.

$\forall x\in N. g(x)\in\{n\in N \mid n\le k+1\}$ משום ש $k+1$ הוא איבר בקבוצה.

ולכן g חסומה, כלומר $g\in A$.

כעת נוכיח ש $f<g$

$\forall x\in N\quad f(x)\le k<k+1=g(x)$

ולכן $f<g$

והוכחנו את הנדרש כי לכל f קיים g כך ש $g>f$

(מ.ש.ל)

~~[illegible]~~

3. א. היחס R הוא אנטי רפלקסיבי, כי לכל $x\in\{1,2,3,4,5\}$ $(x,x)\notin R$

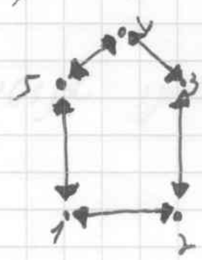
כמו שהוגדר במטלה.

* היחס אינו רפלקסיבי משום שהוא אנטי רפלקסיבי והקבוצה אינה ריקה.

יפה

* היחס אינו סימטרי משום ש $(2,1)\in R$ אבל $(1,2)\notin R$
* היחס הוא אנטי סימטרי תמיד משום שאם aRb אזי לא קיים bRa, כמו שהוגדר במטלה.
* היחס אינו טרנזיטיבי משום ש $(2,3)\in R$ וגם $(3,4)\in R$ אך $(2,4)\in R$ ולכן היחס אינו טרנזיטיבי.

ב.



ג. נסמן את הסגור הסימטרי של S כ- R. של הקבוצה A.

~~$\forall(a,b)\in R$~~

צ"ל: $\forall a\in A.\ \forall b\in A.\ (a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R$

ניקח $a,b\in A$ כך ש $(a,b)\in R$

$$(a,b)\in\{(a,b)\in A\times A \mid aSb \vee bSa\}$$

$aSb \vee bSa$ פסוק אמת

כעת (b,a) אנו יודעים ש $bSa \vee aSb$ הוא פסוק אמת

ולכן $(b,a)\in R$. (R מוגדר להיות הסגור של S)

ולכן R סימטרית.

ד. יחס סדר טוב חייב להיות שבו לכל $a,b\in A$ $(a,b)\in S$ או $(b,a)\in S$.

הסגור הסימטרי של S הוא בדיוק $A\times A$.

נוכיח זאת $\forall(a,b)\in A\times A \Rightarrow (a,b)\in S\vee(b,a)\in S$ (נתון מכך ש S יחס סדר מלא)

$\Rightarrow (a,b)\in$ הסגור הסימטרי של S (נובע ישירות מהגדרת הסגור הסימטרי).

לכן הסגור הסימטרי של S $=A\times A$ } הסגור הסימטרי של S קבוצה ריקה ומוכל ב $A\times A$, משום שהינו מוגדר כך קבוצה זוג ולכן ... קיימת תכונה זו בדיוק.

4. א. יחס שקילות ~~צריך~~ מקיים: סימטריות, רפלקסיביות, טרנזיטיביות.

* רפלקסיביות - $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 < f(x)^2 = f(x) \cdot f(x)$ (יחס ש $0 \neq f(x)$ מוגדרת הטווח).
לכן xRx

* סימטריות - נניח $(x,y) \in R$ ונוכיח שגם $(y,x) \in R$

$$(y,x) \in R \Leftarrow f(y) \cdot f(x) > 0 \Leftarrow f(x) \cdot f(y) > 0 \Leftarrow (x,y) \in R$$

חילוף ב-$\mathbb{R}$

לכן הוכחנו סימטריות.

* נוכיח טרנזיטיביות - לשם כך נשתמש בטענה: אם $a > 0$ וגם $a \cdot b > 0$ אזי $b > 0$. ~~[illegible]~~

נתון: $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$ צ"ל $(x,z) \in R$

$f(x) \cdot f(y) > 0$ וגם $f(y) \cdot f(z) > 0$ נובע מהנתון.

$f(x) \cdot f(y) \cdot f(y) \cdot f(z) > 0$ (מכפלה של שני מספרים חיוביים).

$f(y)^2 \cdot f(x) \cdot f(z) > 0$ (חילוף ב-$\mathbb{R}$)

$f(x) \cdot f(z) > 0$ (לפי הטענה הנ"ל $f(y)^2 > 0$ נכון הוכחנו ברפלקסיביות).

לכן ממשל $f(x) \cdot f(z)$

$(x,z) \in R$ מש"ל.

ב. קבוצת המנה היא:

$$\mathbb{R} \setminus R = \{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}, \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}\}$$

נראה שזאת אכן קבוצת המנה. השאיפה נוכיח ~~[illegible]~~ שאיחוד הקבוצות היא $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Leftarrow$ $f(x) > 0 \vee f(x) < 0 \Leftarrow$

~~$f(x) \ldots \vee \ldots \in \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$~~

$\Leftarrow$ $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\} \vee x \in \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ לכן האיחוד הוא $\mathbb{R}$.

הקבוצות זרות מכיוון שהפונקציה מוגדרת היטב לא יכולה להיות ש $f(x) > 0$ וגם $f(x) < 0$.

כעת נוכיח שאם xRy אזי x,y שייכים לאותה מחלקת שקילות.

אם $xRy \Leftarrow f(x) \cdot f(y) > 0 \Leftarrow$ ~~[illegible]~~

$(f(x) > 0 \wedge f(y) > 0) \vee (f(x) < 0 \wedge f(y) < 0)$ נובע ישירות מאיך שלנו (הגדרה)

~~$f(x), f(y)$~~

מכאן נובע.

לכן $x,y \in \{x\in R \mid f(x)>0\} \vee x,y\in\{x\in R \mid f(x)<0\}$

בגלל שמכאן הם שייכים לאותה מחלקת שקילות.

אם נניח שאם שני איברים שייכים למחלקת שקילות שונה, אזי הם לא מתייחסים.

נניח $x\in\{x\in R \mid f(x)>0\}$ ו $y\in\{x\in R \mid f(x)<0\}$

$f(x)>0 \quad f(y)<0$

$f(x)\cdot f(y)<0$ ולכן $(x,y)\notin R$

לכן למעשה קיימות שתי מחלקות שקילות.

ב. אם f לא היתה על ~~אז~~ היא יכולה להיות מצב שבו הייתה קיימת רק מחלקת שקילות אחת.

לדוגמא אם $f(x)>0$ $\forall x$ ו f לא על וקיימת רק מחלקת שקילות אחת.

אבל אם היו קיימים x,y כך ש $f(x)>0$ ו $f(y)<0$ אזי בהכרח היו קיימות שתי מחלקות שקילות.

ובכלל מכאן לא יכול להיות שתהיה פחות ממחלקת שקילות אחת.