סמסטר א׳ תשס״ה
מועד א׳ 11.02.05

מתמטיקה בדידה
א. אברון, מ. טרסי, י. רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

לגליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתיבת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

<u>נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.</u>

<u>מותר להשתמש בכל משפט, טענה, למה, אשר אינכם נדרשים במפורש להוכיח בבחינה.</u>

כמקובל, האותיות N, R ו-Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.
בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות. ערך מכסימלי לתשובה **נכונה** לשאלה הוא 20%.
למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.

1. תהי $A = \{ \langle x,y\rangle \in \mathbf{R} \times P(\mathbf{R}) \mid \forall a\,(a \in y \Leftrightarrow |a| < x) \}$

א. הראו כי A פונקציה ומצאו את התחום שלה וטווח עבורה.

ב. חשבו את $|A(0)|$ ואת $|A(1)|$.

ג. תארו את הפונקציה A ע״י ביטוי - λ ללא שימוש בסימון "{ }".

ד. האם: $3 \in \left(A \circ (\lambda x \in \mathbf{Q}.\ x^2-1)\right)(2)$?

2. יהיו A, A', B, B' קבוצות כך ש-: $A \subseteq B$, $A' \subseteq B'$, $|B| = |B'| > \aleph_0$,
$|A| = |A'| = \aleph_0$

א. האם בהכרח: $|B - A| = |B' - A'|$?

ב. האם בהכרח: $|A - B| = |A' - B'|$?

ג. תהא D קבוצה אינסופית, ו-A קבוצה חלקית **ממש** ל-D וכן: $|A|+|A|=|A|$.
הוכיחו כי קיימת קבוצה C כך ש-: $A \subset C \subseteq D$ ו-: $|C|+|C| \neq |C|$.

3. נגדיר: $A(n) = \{ 1,2,3, ..., n \}$. תהיינה: $A_1, A_2, ..., A_n$, קבוצות חלקיות של$A(n)$.
תהי: $B = \{ t \in A(n) \mid t \notin A_t \}$.

א. הוכיחו כי $B \neq A_j, \forall 1 \leq j \leq n$.

ב. לכל n תנו דוגמא לקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$ עבורה $B = A(n)$ ודוגמא עבורה $B = \phi$.

4. חשבו את עוצמת כל אחת מהקבוצות:

א. $Q \to (N \to R)$

ב. קבוצת כל היחסים מ- N ל- R

ג. קבוצת מחלקות השקילות של היחס $\{ \langle x,y \rangle \mid xy > 0 \}$ ב- $R-\{0\}$

ד. קבוצת הסדרות הממשיות $\{ \lambda_{k \in N} . a_k \mid \forall_{k \in N}\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \}$

5. א. כמה חלוקות של קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד 100, לשלוש קבוצות זרות A, B ו-C?

ב. בכמה מהן בקבוצה A בדיוק 50 אברים?

ג. בכמה מהן אין בקבוצה A שני מספרים עוקבים?

ד. בכמה מהן בקבוצה A מספר זוגי של אברים?

6. א. הוכיחו כי בכל צביעה של נקודות המישור בשני צבעים, כחול ואדום, תהיינה **לפחות** שתי נקודות הצבועות באותו הצבע והנמצאות במרחק 1, אחת מהשניה.

ב. נתונים שני **עצים**, (V,E_1) ו- (V,E_2), בעלי אותה קבוצת קדקודים V. איחוד שני העצים הוא הגרף $G=(V,E)$, שקבוצת הקשתות שלו היא האיחוד $E=E_1 \cup E_2$. הוכיחו כי יש ב- G קדקוד שדרגתו **אינה** עולה על **שלוש**.

ג. בכמה גרפים פשוטים (V,E) על קבוצת הקדקודים $V=\{1,2,3,4,5\}$ יש לפחות ארבע קשתות ולפחות מעגל אחד? הציגו חישוב מלא עד תוצאת מספרית סופית.

בהצלחה!

פונקציות יוצרות והנוסחות היסודיות

נניח: $\lambda x.F(x)$ יוצרת את $\lambda n.a_n$

$\lambda x.G(x)$ יוצרת את $\lambda n.b_n$

אז:

(1)	$\lambda x.\alpha F(x)+\beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\alpha a_n+\beta b_n$
(2)	$\lambda x.x^m\cdot F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n<m\\ a_{n-m} & n\geq m\end{cases}$
(3)	$\lambda x.\dfrac{F(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{m-1}x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.c^n a_n$
(5)	$\lambda x.F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}a_{\frac{n}{m}} & n/m\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$
(6)	$\lambda x.F(x)\cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\dfrac{F(x)}{1-x}$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k$
(8)	$\lambda x.F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.(n+1)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.x\cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.na_n$
(10)	$\lambda x.\int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0\end{cases}$

פונקציה יוצרת: דוגמאות חשובות

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה בתלי פורמלית
(1)	$\lambda x.x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\frac{1}{1-x}$	$\lambda n.1$	$\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\frac{1}{1+x}$	$\lambda n.(-1)^n$	$\langle 1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\frac{1}{1-cx}$	$\lambda n.c^n$	$\langle 1,c,c^2,c^3,c^4,\ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.(1+x)^\alpha$	$\lambda n.\binom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1,\alpha,\binom{\alpha}{2},\binom{\alpha}{3},\binom{\alpha}{4},\ldots\right\rangle$
(6)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\binom{n+\alpha-1}{n}$	$\left\langle 1,\binom{\alpha}{1},\binom{\alpha+1}{2},\binom{\alpha+2}{3},\ldots\right\rangle$
(7)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\binom{n+m}{m}$	$\left\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots\right\rangle$
(8)	$\lambda x.\frac{\cancel{X}}{(1-x)^2}$	$\lambda n.n$	$\langle 0,1,2,3,4,\ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.-\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{1}{n} & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\rangle$
(10)	$\lambda x.e^{ax}$	$\lambda n.\frac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1,a,\frac{a^2}{2!},\frac{a^3}{3!},\frac{a^4}{4!},\ldots\right\rangle$
(11)	$\lambda x.\cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\frac{a^n}{n!} & \text{זוגי } n-\\ 0 & \text{אי זוגי } n-\end{cases}$	$\left\langle 1,0,\frac{a^2}{2!},0,\frac{a^4}{4!},0,\ldots\right\rangle$
(12)	$\lambda x.\sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & \text{זוגי } n-\\ \frac{a^n}{n!} & \text{אי זוגי } n-\end{cases}$	$\left\langle 0,a,0,\frac{a^3}{3!},0,\frac{a^5}{5!},\ldots\right\rangle$

<u>זהויות בינומיאליות חשובות</u>

זהות	תנאים	
$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$	$k \le n$	(1)
$\binom{x}{k}=\binom{x-1}{k}+\binom{x-1}{k-1}$	$k \ge 1$	(2)
$(a+b)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}a^{\alpha-k}b^{k}$	$\alpha \in N \vee \lvert b/a \rvert < 1$	(3)
$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}=2^{n}$		(4)
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}=0$	$n \ge 1$	(5)
$\binom{n}{k}=(-1)^{k}\cdot s(n,k)=(-1)^{k}\cdot\binom{n+k-1}{k}$		(6)
$\binom{x}{n}\binom{n}{k}=\binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$	$k \le n$	(7)
$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}=\binom{x+n+1}{n}$		(8)
$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$	$m \le n$	(9)
$\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{x+n}{n}$		(10)