1.א. ל- $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ איבר אחד והוא $\{\{\emptyset\}\}$. ל- $P(\{1,1\})=P(\{1\})=\{\emptyset,\{1\}\}$ יש שני איברים.

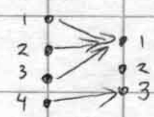
ב. $\{\emptyset\}\subseteq\emptyset$: לא, כי $\emptyset\in\{\emptyset\}$ אבל $\emptyset\notin\emptyset$

$\emptyset\in\{\{\emptyset\}\}$: לא, כי ל- $\{\{\emptyset\}\}$ יש רק איבר אחד והוא $\{\emptyset\}$ ולא $\emptyset$

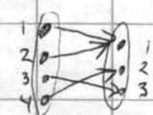
ג. התנאי $A\subseteq A$ מתקיים לכל קבוצה A ולכן התשובה היא $\{\emptyset,\{3\},\{5\},\{3,5\}\}$

3. לא נכון. לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $\emptyset\in P(A)\cap P(B)$ ובפרט $P(A)\cap P(B)\neq\emptyset$.

2.א.



לא 2 ל-1



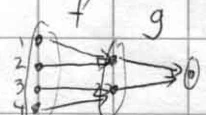
כן 2 ל-1

ב.

$$\forall x_1,x_2,x_3\in A.\ (f(x_1)=f(x_2)\wedge f(x_2)=f(x_3))\longrightarrow(x_1=x_2\vee x_1=x_3\vee x_2=x_3)$$

שלילה: $$\exists x_1,x_2,x_3\in A.\ f(x_1)=f(x_2)\wedge f(x_2)=f(x_3)\wedge x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3\wedge x_2\neq x_3$$

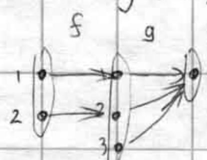
ג. לא נכון. למשל: $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{1\}$



f,g הן 2-ל-1 אבל $g\circ f$ אינה 2-ל-1.

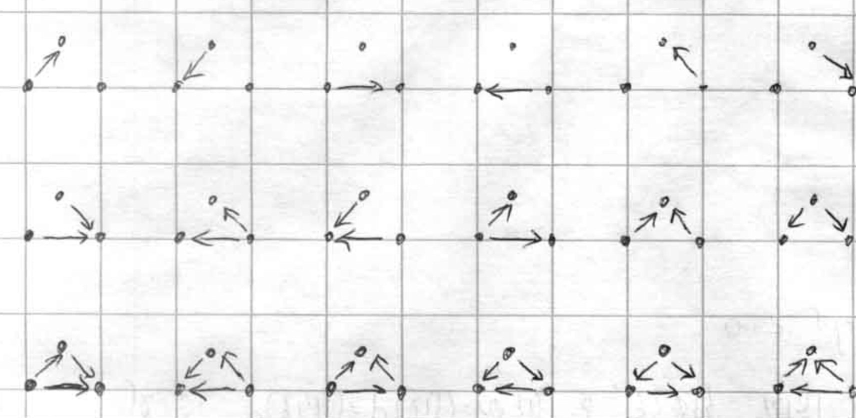
ד. נכון. הוכחה: נניח ש- $g\circ f$ היא 2-ל-1 ונניח בשלילה ש- f אינה 2-ל-1. לכן קיימים $x_1,x_2,x_3\in A$ כולם שונים זה מזה כך ש- $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$. אבל אז גם $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)=g\circ f(x_3)$ ולכן $g\circ f$ אינה 2-ל-1.

ה. לא נכון. למשל: $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{1\}$



$g\circ f$ כן 2-ל-1 אבל g אינה 2-ל-1

3.א. יש בסה"כ 19 יחסים. בשרטוטים הבאים (חוץ מהראשון) השמטתי הלולאות ושמות האיברים.



ב. לא נכון. הוכחה: נראה שכל יחס R שהוא סימטרי ואנטי סימטרי הוא גם טרנזיטיבי.

דבר ראשון, נשים לב שאם aRb אז בהכרח $a=b$. אמנם, אם aRb אז מסימטריה נובע שגם bRa ומאנטי סימטריה נובע $a=b$.

עכשיו נראה ש- R יחס טרנזיטיבי. נניח שלכל a,b,c מתקיים aRb וגם bRc, לפי מה שהראנו קודם, מ- aRb נובע ש- $a=b$. מכיוון ש- $a=b$ אז bRc אומר ש- aRc ולכן היחס טרנזיטיבי.

ג. <u>רפלקסיבי</u>: לא. למשל עבור $f=\lambda x.1$ לא מתקיים fRf.

<u>אנטי רפלקסיבי</u>: כן. לכל $f\in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים $f(3)\leq f(3)+1$ ולכן לא מתקיים $\forall x\in\mathbb{R}. f(x)>f(x)+1$ ולכן $f \not R f$.

<u>סימטרי</u>: לא. למשל $f=\lambda x.3$, $g=\lambda x.5$. אז מתקיים gRf אבל לא מתקיים fRg.

<u>אנטי סימטרי</u>: כן. נוכיח שאם fRg וגם gRf אז $g=f$. בעצם נוכיח דבר חזק יותר, והוא שלעולם לא יתכן ש- fRg וגם gRf בו זמנית (כי בעצם אנטי סימטריה מריקה).

אם fRg אז $\forall x. f(x)>g(x)+1$. בפרט עבור $x=7$, $f(7)>g(7)+1$. לכן $g(7)\leq f(7)+1$ ולכן לא מתקיים gRf.

<u>טרנזיטיבי</u>: כן. אם fRg וגם gRh אז:

$\forall x. f(x)>g(x)+1$

$\forall x. g(x)>h(x)+1$

ביחד נקבל

$\forall x. f(x)>h(x)+2$

בפרט זה גורר ש-

$\forall x. f(x)>h(x)+1$

ולכן fRh כנדרש.

4.א. נכון. הוכחה 1: נסמן $f=g$. אז לפי ההנחה אנחנו יודעים ש- $g\circ f=i_A$
וגם $f\circ g=i_A$. לכן g פונקציה הפוכה של f ולכן
f הפיכה. הוכחנו בשיעור ש-f הפיכה אם"ם f היא פונ' שקילות.

הוכחה 2: נוכיח ש-f חח"ע ועל.

f חח"ע: עבור x_1,x_2 כלשהם, אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז גם
$f(f(x_1))=f(f(x_2))$ ובמילים אחרות $f\circ f(x_1)=f\circ f(x_2)$.
מכיוון ש- $f\circ f=i_A$, קיבלנו $x_1=x_2$, כנדרש.

f על A: ניקח $y\in A$ כלשהו. אז $f(f(y))=y$
ולכן $x=f(y)\in A$ הוא מקור של y.

ב. נוכיח ש- R_f רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>רפלקסיבי</u>: לכל $x\in A$ מתקיים $x=x$ ולכן גם $x=x \lor f(x)=x$ ולכן xR_fx.

<u>סימטרי</u>: נניח שעבור $x,y\in A$ מסויימים מתקיים xR_fy. כלומר מתקיים
$x=y \lor f(x)=y$. אז נחלק לשני מקרים:

① אם $x=y$ אז גם $y=x$ ולכן $y=x \lor f(y)=x$ ולכן yR_fx.

② אם $f(x)=y$ אז ע"י הפעלת f נקבל $f(y)=f(f(x))=x$ ולכן גם
$y=x \lor f(y)=x$ ולכן yR_fx.

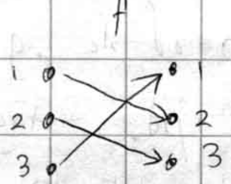
<u>טרנזיטיבי</u>: נניח שעבור $x,y,z\in A$ מסויימים מתקיים yR_fz וגם xR_fy. אז $x=y$ או
$f(x)=y$. נחלק לשני מקרים:

① $x=y$. אז מ- yR_fz נקבל ש- xR_fz.

② $f(x)=y$. אם $y=z$ אז נקבל $f(x)=z$ ולכן xR_fz.
אחרת $y\neq z$ וקיבלנו ש- yR_fz נקבל ש- $f(y)=z$.
אבל מצד שני $f(y)=f(f(x))=x$ ולכן $x=z$ ואז xR_fz.

ג. מחלקת השקילות של איבר $x\in A$ היא כל האיברים שמתייחסים אליו. לפי הגדרת R_f אלה
בדיוק x עצמו ו- $f(x)$. לכן $[x]_{R_f}=\{x,f(x)\}$. מספר האיברים במחלקת
השקילות הוא 2 או 1 (במקרה ש $f(x)=x$). קבוצת המנה מורכבת מכל
מחלקות השקילות ולכן היא בעצם חלוקה של A לזוגות ויחידים.

3. לא נכון. למשל:



אז $R_f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (3,1)\}$

וזה אינו יחס שקילות כי אינו סימטרי (וגם לא טרנזיטיבי).