1.א. תחום: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (מופיע אחרי סימן ה-$\lambda$). טווח: נסתכל על $\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f(y,x))^3$.
זהו איבר של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (כי $(f(y,x))^3\in\mathbb{R}$) ולכן $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הוא טווח של H.

1.ב. נכון. נוכיח ש-H חח"ע ועל.

H חח"ע: יהיו $f_1,f_2\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים $H(f_1)=H(f_2)$. כלומר,

$$\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f_1(y,x))^3=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f_2(y,x))^3$$

שוויון בין פונקציות גורר שוויון על כל איבר בתחום, ולכן,

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad (f_1(y,x))^3=(f_2(y,x))^3$$

מכיוון שפונקציית 'העלאה בחזקת 3' ($\lambda z\in\mathbb{R}.z^3$) היא חח"ע (ובעצם גם על), מתקיים

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f_1(y,x)=f_2(y,x)$$

אבל זה בדיוק אומר ש- $f_1=f_2$.

<u>H על</u>: ניקח $g\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כלשהו. נגדיר

$$f=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(g(y,x))^{1/3}.$$

אז:

$$H(f)=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\underbrace{(f(y,x))^3}_{\text{הצבה ב-}f}=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.((g(x,y))^{1/3})^3=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.g(x,y)=g$$

1.ג. לפני שנפתור את הסעיף, כדאי לראות דוגמא אחת שתסביר איך H מתנהגת:

ניקח $f=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}3 & x=2,y=4\\ 2 & x=0,y=3\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. אז

$H(f)=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}27 & x=4,y=2\\ 8 & x=3,y=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. כלומר, H מחליפה את המשתנים ומעלה את התוצאה בשלישית.

נפתור עכשיו את החלק השני בסעיף. התשובה היא 0 כפי שמראה הטענה הבאה:

<u>טענה</u> לכל $f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ מתקיים $H(f)\neq f$.

<u>הוכחה</u>. $f(5,5)$ הוא איפשהו מספר אי רציונלי (כי $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ הוא טווח של f).
לכן, $(H(f))(5,5)=(f(5,5))^3\neq f(5,5)$ (כי לכל $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ מתקיים $z^3\neq z$). לכן $H(f)\neq f$.

עכשיו נפתור את החלק הראשון. התשובה היא $2^{\aleph}$. נוכיח לפי קנטור-ברנשטיין.

$$|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q} \mid H(f)=f\}| \le |\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}|^{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

מצד שני, נסתכל על הפונקציה הבאה:

$$G = \lambda h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}.\ \lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases} h(x) & \text{אם } x=y \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

<u>טענה</u> $G$ היא פונקציה חח"ע

<u>הוכחה</u> ניקח $h_1,h_2\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ כך ש- $G(h_1)=G(h_2)$. מכך נובע שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $G(h_1)(x,x)=G(h_2)(x,x)$. אבל זה בדיוק אומר ש- $h_1(x)=h_2(x)$. מכיוון שזה מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$, קיבלנו ש- $h_1=h_2$ ∎

<u>טענה</u> $\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q} \mid H(f)=f\}$ הוא טווח של $G$.

<u>הוכחה</u> ניקח $h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לשרירותי. אז $G(h)=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases} h(x) & \text{אם } x=y \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

קל לראות ש- $\{0,1\}$ הוא טווח של $G(h)$ ולכן $G(h):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$

ולכן גם $G(h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$. נשאר להראות ש- $H(G(h))=G(h)$.

ואכן,

$$H(G(h)) = \lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\ (G(h)(y,x))^3$$
$$= \lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases} h(y)^3 & \text{אם } x=y \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$
$$= \lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases} h(y) & \text{אם } x=y \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases} = G(h)$$

כי $h(y)$ הוא 0 או 1.

לסיכום, הראינו שלכל $h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ מתקיים $G(h)\in\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q} \mid H(f)=f\}$ והטענה נובעת. ∎

שתי הטענות ביחד מראות ש-

$$|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q} \mid H(f)=f\}| \ge |\mathbb{R}\to\{0,1\}| = 2^{\aleph}$$

2.א. הפונקציה $H = \lambda f\in \mathbb{N}\to\{1,2\}.\ \lambda k\in\mathbb{N}^+.\ f(k-1)+2$ היא פונקציית שקילות כנדרש. קל לראות ש- $\mathbb{N}^+\to\{3,4\}$ זה הטווח של $H$. נראה חח"ע ועל.

<u>$H$ חח"ע</u>: ניקח $f_1, f_2 \in \mathbb{N}\to\{1,2\}$ כך ש-$H(f_1)=H(f_2)$. אז

$$\lambda k\in\mathbb{N}^+.\ f_1(k-1)+2 = \lambda k\in\mathbb{N}^+.\ f_2(k-1)+2$$

שוויון בין פונקציות גורר שוויון לכל ערך בתחום, ולכן

$$\forall k\in\mathbb{N}^+.\ f_1(k-1)+2 = f_2(k-1)+2$$

נחסר 2, ונקבל:

$$\forall k\in\mathbb{N}^+.\ f_1(k-1) = f_2(k-1)$$

זה בדיוק שקול: $\forall k\in\mathbb{N}.\ f_1(k)=f_2(k)$ ולכן $f_1=f_2$.

<u>$H$ על</u>: ניקח $g\in\mathbb{N}^+\to\{3,4\}$ כלשהי ונגדיר $f=\lambda k\in\mathbb{N}.\ g(k+1)-2$, אז

$$H(f) = \lambda k\in\mathbb{N}^+.\ f(k-1)+2 =$$

$$\lambda k\in\mathbb{N}^+.\ (g(k-1+1)-2)+2 = \lambda k\in\mathbb{N}^+.\ g(k) = g$$

<u>הערה</u> מה שעשינו כאן זה קצת לחזור על ההוכחה שאומרת שאם $|A_1|=|A_2|$ וגם $|B_1|=|B_2|$ אז $|A_1^{B_1}|=|A_2^{B_2}|$ (תוך שימוש בפונקציית שקילות $\lambda k\in\{1,2\}.\ k+2$ מ- $\{1,2\}$ ל- $\{3,4\}$ ובפונקציית שקילות $\lambda k\in\mathbb{N}.\ k+1$ מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}^+$)

2.ב. תשובה: מתקיים אם ורק אם $a$ היא עוצמה אינסופית.

עבור כל <u>עוצמה סופית $a$</u>: במקרה זה, $2^a$ היא גם כן עוצמה סופית. בנוסף, $2^a\neq 0$. לכן $\aleph_0\cdot 2^a=\aleph_0$ (כי $\aleph_0$ כפול כל עוצמה סופית ששונה מאפס נשאר $\aleph_0$). לכן $2^a\neq 2^a\cdot\aleph_0$ כי צד ימין זו עוצמה סופית בעוד שמאל זו עוצמה אינסופית.

עבור כל <u>עוצמה אינסופית $a$</u>: ראינו בכיתה שאם $a$ אינסופית אז $a+\aleph_0=a$.

לכן, $2^a \le \aleph_0\cdot 2^a \le 2^{\aleph_0}\cdot 2^a = 2^{\aleph_0}\cdot 2^a = 2^{a+\aleph_0} = 2^a$

ומקנטור ברנשטיין מקבלים $\aleph_0\cdot 2^a = 2^a$.

כי $1\le\aleph_0$

(2) ג. אלה בדיוק כל התמורות של הספרות 1 עד 9 (כי אם במספר בין 0 ל- 1,000,000,000 מופיעות כל הספרות מ-1 עד 9 אז במספר חייבת להופיע כל ספרה מ-1 עד 9 בדיוק פעם אחת). לכן התשובה היא $9!$.

(2) 3. הפונקציה היוצרת כאן היא $\underbrace{(1+x+x^2)\cdot\ \cdots\ \cdot(1+x+x^2)}_{100\ \text{פעמים}}=(1+x+x^2)^{100}$

כי המקדם של $x^n$ הוא בדיוק מספר הדרכים לבחור מכל אחד מאבר הגורמים או $x^0=1$ או $x^1$ או $x^2$ כך שסכום החזקות הוא $n$.

המקדם של $x^{197}$ הוא כמספר הסדרות באורך 100 שמורכבות מ- 0,1,2 וסכומם 197. סדרה כזאת יכולה להיות מורכבת מ- 97 ספרות 2 ועוד 3 ספרות 1 או מ-98 ספרות 2, ספרה 1 אחת ועוד ספרה 0 אחת.

לכן התשובה היא: $\binom{100}{3}+100\cdot 99$

לבחור מקום ל-1-ים    מקום ל-0 מקום ל-1

3. לפני שנענה על השאלה, ננסה להבין את היחס $S$. מההגדרה רואים שזהו יחס על $P(\mathbb{Z})$. לכן זהו יחס בין תתי קבוצות של $\mathbb{Z}$. שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{Z}$ מתייחסות אם ורק אם $|A|=|B|=|A\cup B|$. כלומר, הדרישה היא של-$A$, ל-$B$ ול-$A\cup B$ תהיה אותה עוצמה.

<u>טענה 1</u> תהא $A\subseteq\mathbb{Z}$ קבוצה סופית. אז $ASB$ אם ורק אם $A=B$

<u>הוכחה</u> אם $A=B$ אז ברור מההגדרה ש $ASB$. בכיוון הפוך, נניח ש- $ASB$.
מכיוון ש- $A$ קבוצה סופית, $|A|=|A\cup B|$ גורר ש- $A=A\cup B$ ולכן $B\subseteq A$.
מכיוון שגם $B$ קבוצה סופית (כי $|A|=|B|$), אז $|B|=|A\cup B|$ גורר ש- $B=A\cup B$ ולכן $A\subseteq B$.
לסיכום, קיבלנו ש- $A=B$. ∎

<u>טענה 2</u> תהא $A\subseteq\mathbb{Z}$ קבוצה אינסופית. אז $ASB$ אם ורק אם $B$ אינסופית.

<u>הוכחה</u> נניח ש-$B$ אינסופית. לפי תוצאה שראינו בכיתה, כל תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{Z}$ היא מעוצמה $\aleph_0$ (כי $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר). לכן $A,B,A\cup B$ הן כולן קבוצות מעוצמה $\aleph_0$. בפרט, מתקיים $|A|=|B|=|A\cup B|$ ולכן $ASB$.

בכיוון ההפוך, נניח ש- $ASB$. לפי הגדרה, $|B|=|A|$, ולכן גם $B$ אינסופית. ∎

3א. $S$ הנו יחס על $P(\mathbb{Z})$.

<u>רפלקסיביות:</u> נראה שלכל $A\subseteq\mathbb{Z}$ מתקיים $ASA$. אם $A$ סופית זה נובע מטענה 1 ואם $A$ אינסופית זה נובע מטענה 2.

<u>סימטריות:</u> נניח שמתקיים $ASB$. אם $A$ סופית, אז לפי טענה 1 $A=B$ ולכן בהכרח $BSA$. אחרת, לפי טענה 2, $B$ גם כן אינסופית. לפי טענה 2 (בפעם שניה), מתקיים $BSA$.

<u>טרנזיטיביות:</u> נניח שמתקיים $ASB$ וגם $BSC$. אם $A$ סופית אז לפי טענה 1, $A=B$. לכן, $B$ סופית ואז לפי טענה 1, $B=C$. כלומר, $A=C$ ולכן $ASC$. אם $A$ אינסופית, אז לפי טענה 2, $B$ אינסופית ולפי טענה 2 גם $C$ אינסופית. מכיוון שגם $A$ וגם $C$ אינסופיות, מתקיים $ASC$.

3ב. $|[\mathbb{N}]_S|=\aleph$, $[\mathbb{N}]_S=\{A\subseteq\mathbb{Z}\mid |A|=\aleph_0\}$

<u>הסבר:</u> לפי טענה 2, הקבוצות שמתייחסות ל-$\mathbb{N}$ הן בדיוק הקבוצות האינסופיות, כלומר אלה בעוצמה $\aleph_0$.

עוצמת מחלקת השקילות היא $\aleph$ כי היא מוכלת ב- $P(\mathbb{Z})$ (שעוצמתה $\aleph$) והיא מכילה את (למשל) $\{\mathbb{N}_{even}\cup A\mid A\subseteq\mathbb{N}_{odd}\}$ וזו קבוצה מעוצמה $\aleph$ (ניתן לראות ע"י פונקציית השקילות $f=\lambda A\subseteq\mathbb{N}_{odd}.\,A\cup\mathbb{N}_{even}$).

$[\{1,4,9\}]_S=\{\{1,4,9\}\}$, $|[\{1,4,9\}]_S|=1$

<u>הסבר:</u> לפי טענה 1, קבוצה סופית מתייחסת רק לעצמה.

(3.ג) לפי טענה 1, לכל קבוצה סופית $A$ מתקיים $[A]_S = \{A\}$. לכן לכל קבוצה סופית יש מחלקת שקילות משל עצמה. בנוסף, לפי טענה 2, יש מחלקת שקילות שמכילה את כל תתי הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{Z}$.

לסיכום: $\mathbb{Z}/_S = \{\{A\} \mid A \subseteq \mathbb{Z} \text{ סופית}\} \cup \{\{A \mid A \subseteq \mathbb{Z} \text{ אינסופית}\}\}$.

עוצמת קבוצת המנה היא $\aleph_0$ כי ניתן למנות את תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{Z}$ ובנוסף $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

(3.ד) לא. הטרנזיטיביות היא נכשלת. למשל: $A = \mathbb{N}_{odd}, B = \mathbb{N}, C = \mathbb{N}_{even}$

אז: $ASB$ כי $|A| = |B| = |A \cap B|$ (כי $A \cap B = A$)

$BSC$ כי $|B| = |C| = |B \cap C|$ (כי $B \cap C = C$)

אבל $A \not S C$ כי $|A| = |C| = \aleph_0, |A \cap C| = 0$.

(4.א) בכל צעד יש בדיוק שתי אפשרויות (עם כיוון השעון או נגדו) ולכן מספר הטיולים הוא $2^n$.

(4.ב) נגדיר את $a_n$ כמספר הטיולים באורך $n$ שמתחילים ב-1 ומסתיימים ב-1.

אז למשל:

$a_0 = 1$ (המסלול הריק)

$a_1 = 0$

$a_2 = 2$

$a_3 = 0$

$a_4 = 6$

$a_5 = 0$

$a_6 = 22$

$\vdots$

מיד אנחנו רואים ש- $a_n = 0$ כאשר $n$ אי-זוגי.

הסבר: בצעדים אי-זוגיים אנחנו נמצאים במקום 2, 4 או 6 ולכן לא ייתכן שנחזור ל-1.

לכן מספיק להבין את $a_n$ עבור $n$ זוגי.

נגדיר סדרה $b_n$ כמספר הטיולים באורך $n$ שמתחילים ב-3 ומסתיימים ב-1.

אז למשל:

$b_0 = 0$

$b_1 = 0$

$b_2 = 1$

$b_3 = 0$

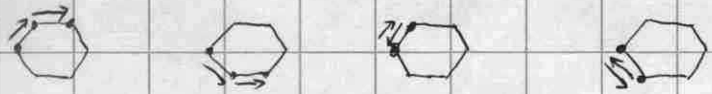
$b_4 = 5$

$\vdots$

נשים לב שבגלל סימטריה, מספר הטיולים באורך $n$ שמתחילים ב-5 ומסתיימים ב-1 הוא גם כן $b_n$.

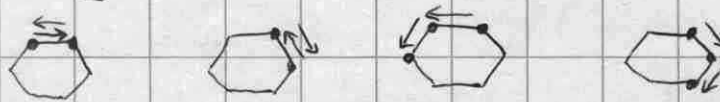
נמצא עכשיו נוסחת נסיגה ל- $a_n$. נפריד לפי שני הצעדים הראשונים:

$$a_n = b_{n-2} + b_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-2} = 2(a_{n-2}+b_{n-2})$$



בצורה דומה, נמצא נוסחת נסיגה ל- $b_n$:

$$b_n = b_{n-2} + b_{n-2} + a_{n-2} + b_{n-2} = 3b_{n-2}+a_{n-2}$$



מהנוסחה הראשונה מקבלים: $b_{n-2}=\frac{1}{2}a_n - a_{n-2}$ ע"י הצבה בנוסחה השנייה, מקבלים

$$a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$$

תנאי ההתחלה הם $a_0=1, a_2=2$ ועכשיו נותר רק למצוא פתרון לכל $n$ זוגי.

לשם פשטות, נגדיר $c_k=a_{2k}$. אז עלינו לפתור את

$$c_0=1,\ c_1=2,\quad c_k=5c_{k-1}-4c_{k-2}$$

הפולינום האופייני הוא $x^2-5x+4$ ושורשיו הם $4$, $1$. לכן נחפש

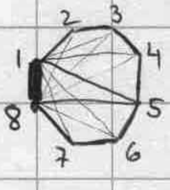
פתרון מהצורה $c_k=A+B\cdot 4^k$. הצבת תנאי ההתחלה נותנת $c_k=\frac{2+4^k}{3}$.

לסיכום, קיבלנו ש- $a_n=0$ אם $n$ אי-זוגי ואחרת $a_n=\frac{2+2^n}{3}$.

4.ב) <u>פתרון א' - לפי צלע:</u>

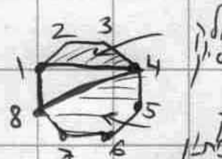
את תנאי ההתחלה קל לבדוק. ניקח מצולע בעל n צלעות ונקבע צלע אחת כלשהי במצולע. בכל חלוקה של המצולע למשולשים, צלע זו שייכת למשולש אחד בדיוק. נחלק למקרים לפי הקודקוד שסוגר את המשולש עם צלע זו.

<u>דוגמא</u> במצולע עם $n=8$, הצלע $(1,8)$ יכולה להיות במשולש עם $6,5,4,3,2$ או $7$.




לכל קביעה של הקודקוד שסוגר משולש עם הצלע שלנו, הבחירה מתפרקת לשני בעיות בלתי תלויות. כלומר, עלינו למצוא חלוקה למשולשים של החלק העליון ושל החלק התחתון. בהנחה שהצלע הקבועה היא $(n,1)$ (כמו בדוגמא) אז אם הקודקוד השלישי הוא $i$, החלק העליון הוא מצולע עם $i$ צלעות והחלק התחתון הוא מצולע עם $n+1-i$ צלעות. במקרה ש- $i=2$, אין חלק עליון והחלק התחתון הוא בעל $n-1$ צלעות. בדומה, כאשר $i=n-1$, אין חלק תחתון, והחלק העליון הוא בעל $n-1$ צלעות.

<u>דוגמא</u>

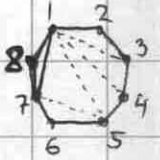



לסיכום, מקבלים

$$a_n = \underset{\substack{\uparrow \\ i=2}}{a_{n-1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=n-1}}{a_{n-1}} + \sum_{i=3}^{n-2} a_i a_{n+1-i}$$

## פתרון ב' - לפי קודקוד:

בפתרון זה נחלק למקרים לפי מצבו של קודקוד מסוים. נמספר את הקודקודים $1,2,\dots,n$ ונניח שהקודקוד המיוחד הוא $n$. נפריד למקרים:

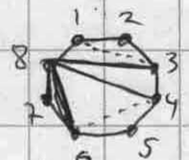



**מקרה 1:** הקודקוד נמצא במשולש עם שני שכניו. למשל:

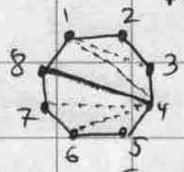
במקרה זה, נותרנו עם מצולע בעל $n-1$ צלעות ולכן מקרה זה תורם $a_{n-1}$.

**מקרה 2:** מהקודקוד יוצאת צלע אחת או יותר של החלוקה.

למשל:




או




נסמן ב-$i$ את שמו של הקודקוד בעל האינדקס הנמוך ביותר שאליו יוצאת צלע. (בדוגמאות הקודמות, $i=4$, $i=3$)

כעת נותרנו עם שני חלקים בלתי תלויים: בחלק התחתון (מתחת לצלע $(n,i)$) יש מצולע עם $n+1-i$ צלעות שאותו יש לחלק למשולשים בדרך כלשהי. בחלק העליון יש מצולע עם $i+1$ צלעות שאותו יש לחלק למצולעים ללא הוצאת צלע מקודקוד $n$. זה שקול לבעיית החלוקה של מצולע בעל $i$ צלעות (בדומה למקרה 1 למעלה).

לכן התרומה לסכום הכולל היא $a_i a_{n+1-i}$. וזה נכון לכל $i$ בין $3$ ל- $n-2$. המקרה הנוסף שנשאר הוא $i=2$.

במקרה זה אין חלק עליון והתרומה היא $a_{n-1}$.

לכן בסך הכל קיבלנו

$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{מקרה 1}} + \underbrace{a_{n-1}}_{\substack{\text{מקרה 2} \\ i=2}} + \sum_{i=3}^{n-2} a_i a_{n+1-i}$$