מתמטיקה בדידה
א . אברון , ע . רגב , י . רודיטי

סמסטר א׳ תשס״ו
מועד ג׳ 2006/11/17

משך הבחינה שלוש שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

רשום תשובותיך הסופיות **רק** על טופס הבחינה, **ורק** במקום המיועד לכך. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

- בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות.
- **<u>הקפידו לנמק כל תשובה בפרוט ובמדויק.</u>**
- **ניקוד:** ניקוד מקסימלי לתשובה נכונה לשאלה הוא 20 (סעיפי בונוס עשויים להוסיף עד 3 נקודות נוספות). למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתיים והתוצאה תתווסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.
- כמקובל, האותיות $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים והממשיים.

בְּהַצְלָחָה!

1. תהי A קבוצה. נגדיר את $T(A)$ באופן הבא:

$$T(A) = \{ B \subseteq A \mid |B| \cdot |A \setminus B| = |A| \}$$

א. מצאו את עוצמת הקבוצות: $T(\{1,\ldots,100\})$, $T(\{1,2,3,4\})$, $T(\emptyset)$.

ב. מצאו את עוצמת $T(\mathbb{N})$.

ג. תהי a עוצמה. נגדיר: $f(a) = |A \cup T(A)|$ כאשר A היא קבוצה המקיימת $|A| = a$. הוכיחו ש- f **אינה** מוגדרת היטב (כלומר, היא תלויה בבחירת A).

ד. **בונוס**: תהא A קבוצה אינסופית המקיימת $|A|*|A|=|A|$. הוכיחו כי $|T(A)|=|P(A)|$.

2. תהיינה A,B קבוצות של מספרים טבעיים חיוביים (כלומר, תתי קבוצות של $\mathbb{N}^+=\{1,2,\ldots\}$).
נגדיר:

$$A * B = \{ a \cdot b \mid a \in A, b \in B \}$$

א. חשבו את $\mathbb{N}^+ * \emptyset$, $\mathbb{N}_{odd} * \mathbb{N}_{odd}$, $\{2,8,9\} * \{2,3\}$

ב. נגדיר את היחס הבא:

$$R = \{ \langle A,B \rangle \in P(\mathbb{N}^+) \times P(\mathbb{N}^+) \mid \exists C \in P(\mathbb{N}^+) \,.\, B = A * C \}$$

האם R הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי? על איזו קבוצה?

ג. האם R הוא יחס טרנזיטיבי?

ד. האם R הוא יחס אנטי-סימטרי (חלש)?

ה. **בונוס:** תאר (עם הוכחה) את הקבוצה הבאה:

$$\left\{ A \in P(\mathbb{N}^+) \;\middle|\; |A| < \aleph_0 \wedge |A*A|+1=2|A| \right\}$$

3. תהי P קבוצה של "נקודות" ותהי L קבוצה של "ישרים" בעולם דמיוני. כל ישר ב-L הוא קבוצה של נקודות, כלומר תת-קבוצה של P. הקבוצות P ו- L מקיימות את התכונות הבאות:

א. דרך כל שתי נקודות שונות של P עובר ישר יחיד מ-L.

ב. כל ישר ב-L הוא קבוצה בעוצמה 3.

(דוגמא לקבוצות כאלה:
$P=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $L=\{\{1,2,3\},\{1,4,7\},\{3,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,5\},\{1,5,6\},\{2,4,6\}\}$)

נגדיר:

$$S = \{(x,y) \in P \times P \mid x \neq y\}$$
$$f = \lambda s \in S.(\pi_1(s), \iota z.z \in \pi_1(s)\pi_2(s) \setminus \{\pi_1(s), \pi_2(s)\})$$

כאשר $\pi_1(s)$ מסמן את האיבר הראשון בזוג הסדור s, $\pi_2(s)$ מסמן את האיבר השני בזוג הסדור s, $\pi_1(s)\pi_2(s)$ הוא הישר העובר דרך הנקודות $\pi_1(s)$ ו-$\pi_2(s)$, ו-ιz מסמן את "ה-z היחיד כך ש-".

א. מצאו תחום וטווח ל-f והוכיחו כי f היא פונקציה מוגדרת היטב.

ב. הוכיחו כי f היא פונקצית שקילות ומצאו פונקציה הפוכה.

נמקו את כל שלבי ההוכחות!

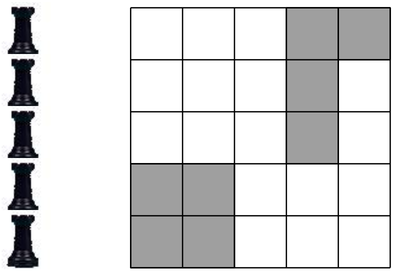
4. נגדיר: $F = \lambda g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{R}).\ \lambda n \in \mathbb{N}\ .\ g(n+1) + 2g(n)$

א. מצאו תחום וטווח של F וחשבו את $(F(\lambda n \in \mathbb{N}\ .\ n^2-8))(5)$

ב. פתרו את המשוואה $(F \circ F)(X) = X$ (כלומר מצאו את כל האברים X בתחום שמקיימים את תנאי זה).

5. א. בכמה דרכים ניתן להניח חמישה צריחים על הריבועים הלבנים בלוח שמשמאל כך שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק צריח אחד?

ב. תהא A תת-קבוצה של $\{1,\ldots,99\}$ בת לפחות 36 אברים.
הוכיחו שקיימים שלושה מספרים שונים ב-A שסכום ספרותיהם זהה.



6. עבור גרף קשיר נתון, נגדיר את המרחק בין שני צמתים בתור אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם.

א. יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר בעל 5 צמתים שבו כל הדרגות הן לכל היותר 3. הוכיחו שקיימים שני צמתים ב-G שהמרחק ביניהם הוא לפחות 2.

ב. עבור כל $n \geq 2$, מצאו את מספר העצים על קבוצת הצמתים $\{1,\ldots,n\}$ שקיימים בהם שני צמתים במרחק $n-1$.

ג. **בונוס:** עבור כל $n \geq 3$, מצאו את מספר העצים על קבוצת הצמתים $\{1,\ldots,n\}$ שקיימים בהם שני צמתים במרחק $n-2$.