

סמסטר ב' תשס"ז  
מועד א' 6 ביולי 2007

מתמטיקה בדידה  
מרצה - מיכאל טרסי  
מתרגלים - דן וילנצ'יק, ישי חביב

משך הבחינה **שעתיים וחצי**. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**.

יש להשיב על **כל** שלוש השאלות. השאלות שוות בערך. חלוקת הנקודות בכל שאלה: 20 נק' לתשובה **מלאה ומנומקת היטב** לסעיף בודד, עוד 10 נק' לסעיף נוסף ו-4 נק' נוספות עבור תשובה מלאה לכל שלושת הסעיפים.  
כל תוצאה שהוצגה בכיתה או בתרגול אפשר לצטט בלי הוכחה.

1. המשתנים  $A$  ו- $B$  מציינים קבוצות. נסמן באות  $\psi$  את תבנית הפסוק -  
 $(\exists f \in B^{(A \rightarrow \{0,1\})} \forall x, y \in \{0,1\}^A f(x)=f(y) \Rightarrow x=y) \wedge (\exists g \in A^B \forall x, y \in B g(x)=g(y) \Rightarrow x=y)$

א. רשמו את שלילת התבנית  $\psi$  בלא שמוש בקשר השלילה.

ב. האם הפסוק המתקבל מהתבנית  $\psi$  על ידי קשירת שני המשתנים  $A$  ו- $B$  באמצעות כמת הקיום  $\exists$  הוא פסוק אמת?

ג. האם לכל עוצמה  $a > 0$  קיימת עוצמה  $b > 0$  כך ש  $ab = b$  (אין להסתמך כאן על חומר החורג ממה שנלמד במסגרת הקורס)?

2. פונקציה  $f$ , מקבוצה  $A$  לקבוצה  $B$ , תקרא **עירבול** של פונקציה  $g$  מ- $A$  ל- $B$  אם קיימת פונקציה הפיכה  $h$  מ- $A$  לעצמה, כך ש-  $f = g \circ h$ .

א. האם היחס  $\{f\}$  היא עירבול של  $g$   $\{ \langle f, g \rangle \}$  הוא יחס שקילות (בקבוצת הפונקציות מ- $A$  ל- $B$  עבור כל שתי קבוצות לא ריקות  $A$  ו- $B$ )?

ב. מהו המספר הגדול ביותר של פונקציות מתוך  $\{1,2,3\} \rightarrow P(\{1,2,3\})$ , שאף אחת מהן אינה עירבול של אחרת מביניהן.

ג. כמה פונקציות מתוך  $\{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$  הן יחסים טרנזיטיביים?

3. א. כמה פונקציות הפיכות  $f$  מהקבוצה  $A = \{1,2,3,\dots,9\}$  לעצמה מקיימות:  
 $\forall x \in A f(x) + x \neq 10$  ? רמז: על הכובע של 4 כתוב 6.

ב. הנסיון להתיר את המשוואה  $x^3 = x^2 + 4x - 4$ . באמצעות שיטת ברנולי נכשל אם בוחרים, למשל, את 0, 1 ו-1 כשלושת אברי הסדרה הראשונים. מדוע? האם אפשר להגיע לפתרון על ידי בחירת תנאי התחלה אחרים? אם כן כיצד?

ג. **אורך** של מסילה בגרף הוא מספר ה**קשתות** שהיא כוללת. בכמה עצים על קבוצת הקדקדים  $\{1,2,\dots,9\}$  המסילה הארוכה ביותר היא באורך 7?

בהצלחה!