פתרון בחינה במתמטיקה בדידה, 6.7.2007

<u>פתרון לשאלה מספר 1</u>

א. $(\forall f\in B^{(A\to\{0,1\})}\ \exists x,y\in\{0,1\}^A.\ f(x)=f(y)\wedge x\neq y)\vee(\forall g\in A^B\ \exists x,y\in B.\ g(x)=g(y)\wedge x\neq y)$.

ב. לא, הפסוק הוא פסוק שקר.
<u>הוכחה</u>: תהיינה שתי קבוצות A,B כלשהן. החלק השמאלי של הביטוי פירושו קיימת $f\in B^{(A\to\{0,1\})}$ חח״ע, או באופן שקול $|B|\leq|\{0,1\}\to A|$. החלק הימני פירושו קיימת $g\in A^B$ חח״ע, או באופן שקול $|A|\leq|B|$. לכן, מטרנזיטיביות היחס $\leq$, אם ערך הפסוק אמיתי אז קיימת קבוצה A עבורה $|A|\leq|\{0,1\}\to A|=2^{|A|}$, בסתירה למשפט קנטור.

ג. כן, תהי עוצמה $a>0$, אזי נבחר $b=a^{\aleph_0}$, ונקבל $b=a^{\aleph_0}=a^{\aleph_0+1}=a\cdot a^{\aleph_0}=a\cdot b$.

<u>פתרון לשאלה מספר 2</u>

א. כן, היחס הוא יחס שקילות (נסמן את היחס ב-S).
<u>הוכחה</u>:
רפלקסיבי: תהי $f\in A\to B$, אזי נבחר $h=i_A$, ונקבל $f=f\circ i_A$, ולכן $\langle f,f\rangle\in S$.
סימטרי: נניח $\langle f,g\rangle\in S$, אז קיימת h הפיכה כך ש- $f=g\circ h$. נרכיב את h^{-1} מימין ונקבל ש- $g=f\circ h^{-1}$, ולכן $\langle g,f\rangle\in S$.
טרנזיטיבי: נניח $\langle f,g\rangle\in S\wedge\langle g,k\rangle\in S$. לכן קיימות h_1,h_2 הפיכות עבורן $f=g\circ h_1\wedge g=k\circ h_2$. נגדיר $h=h_2\circ h_1$, זוהי פונקציה הפיכה כהרכבת הפיכות, ומאסוציאטיביות פעולת ההרכבה נקבל $f=k\circ h$, ולכן $\langle f,k\rangle\in S$.

ב. נבחר $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{1,2,3\}$ ונסמן ב-S את היחס המתקבל בסעיף א׳ עבור קבוצות אלה.
המספר הגדול ביותר של פונקציות ב- $A\to B$ שאף אחת מהן אינה ערבול של אחרת מביניהן הוא בדיוק **עוצמת קבוצת המנה** של S. מחלקת שקילות ביחס S מוגדרת ע״י מספר איברי A שתמונתם 1, מספר איברי A שתמונתם 2 ומספר איברי A שתמונתם 3. לכן עוצמת קבוצת המנה היא כמספר האפשרויות לחלק $|A|=8$ כדורים זהים ל- $|B|=3$ תאים. מספר האפשרויות לכך הוא $\binom{10}{8}$.

ג. פונקציה $f:A\to A$ היא יחס טרנזיטיבי אם ורק אם היא זהות על תמונתה. **מדוע?**
$\Leftarrow$ נניח f היא יחס טרנזיטיבי, ונניח כי $x\in A$ בתמונת f. אז קיים $y\in A$ כך ש- $\langle y,x\rangle\in f$. כמו-כן $\langle x,f(x)\rangle\in f$, ומטרנזיטיביות $\langle y,f(x)\rangle\in f$. מחד-ערכיות הפונקציה f נסיק $x=f(x)$.
$\Rightarrow$ נניח ש-f היא זהות על תמונתה, ונניח כי $\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in f$. אז $y\in A$ בתמונת f ולכן $y=z$, לכן- $\langle x,z\rangle\in f$ ולכן f היא יחס טרנזיטיבי.
כעת נחלק לשלושה מקרים: אם גודל תמונת f הוא 3 אז פונקצית הזהות היא היחידה שעונה על הדרישה. אם גודל תמונת f הוא 2 אז יש 3 אפשרויות לבחירת האיבר $x\in A$ שאינו בתמונה, ולכל אחת כזו יש 2 אפשרויות לבחור את תמונתו של x; בסה״כ 6 אפשרויות. אם גודל תמונת f הוא 1, אז 3 הפונקציות הקבועות עונות על הדרישה. בסה״כ קיבלנו ש- **10** פונקציות מתוך $\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ הן יחסים טרנזיטיביים.

<u>פתרון לשאלה מספר 3</u>

א. הבעיה שקולה לספירת מספר האי סדרים הטוטליים (דריינג׳מנטס) של 9 אברים והפתרון לפיכך $\lfloor 9!/e\rfloor$.

ב. לפולינום שני שורשים בעלי אותו ערך מוחלט: ±2. בהעדר שורש מכסימלי יחיד, המנה a_{k+1}/a_k, בדרך כלל (תלוי בתנאי ההתחלה), אינה מתכנסת ולכן השיטה נכשלת. השיטה תעבוד אם בסדרה המתקבלת אחד משני השורשים הללו לא יהיה מיוצג, למשל, כאשר שלושת האברים הראשונים הם 1, 2, 4.

ג. $5/2(9!)$. הפתרון מתקבל על ידי בדיקת שלושה מקרים: חיבור קודקוד תשיעי בקשת אל הקודקוד השני, השלישי, או הרביעי במסילה מכסימלית באורך שבע (שמונה קודקודים).