

סמסטר א' תשס"ז
מועד ב' 18.9.2007

מתמטיקה בדידה
אברון, טרסי, רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**. יש להשיב על **חמש** השאלות. משקלן של שלוש השאלות שתקבלנה את הציונים הגבוהים יותר 25% לכל שאלה ומשקלן של שתי השאלות שתקבלנה ציונים נמוכים 12.5% לשאלה. כל תוצאה שהוצגה בכיתה או בתרגול אפשר לצטט בלי הוכחה, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

1 א. חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות (N היא קבוצת המספרים הטבעיים):
i. $(N \rightarrow \{0,1\}) \rightarrow P(\{\phi\})$ ii. $P(N - (N - \{1,2,3\}))$

ב. חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות:

iii. $P(N) - P(N - \{1,2,3\})$ iv. $P(P(N) \cap P(P(N)))$

ג. כנגד שתי עוצמות $a, b > 0$ נגדיר $\text{Log}(a, b) = \{c \mid a^c = b\}$ תנו דוגמה לעוצמות a ו- b כך ש $|\text{Log}(a, b)| = \aleph_0$. הוכיחו קביעתכם במלואה.

2 א. מצאו בטוי סגור לאבר הכללי a_k של הסדרה $\lambda k \in N. a_k$ המוגדרת על ידי $a_0 = 2$,
 $a_1 = 5$ ומשוואת הנסיגה $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$

ב. מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה $\lambda k \in N. b_k$ שסדרת ההפרשים שלה $\lambda k \in N. d_k$
(מוגדרת על ידי $d_0 = b_0$, ולכל k חיובי $d_k = b_k - b_{k-1}$), מקיימת $d_0 = 1$, $d_1 = 2$
ואת משוואת הנסיגה $d_{k+2} = 5d_{k+1} - 6d_k + 2$.

ג. הוכיחו כי קבוצת ההפרשים בין סדרות שהן פתרונות של משוואת הנסיגה בסעיף ב' (עם תנאי התחלה כלשהם) היא מרחב לינארי והציגו בסיס למרחב זה.

3 לכל מספר טבעי n נסמן ב- I_n את קבוצת המספרים הטבעיים הקטנים מ- n , למשל $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. חשבו את העוצמות הבאות, והשלימו את החישוב לקבלת תוצאה מספרית סופית.

א. $|I_5 \rightarrow I_{10}|$

ב. $|\{f \in (I_5 \rightarrow I_{10}) \mid |\text{Image}(f)| = 3\}|$

ג. $|\{f \in (I_5 \rightarrow I_{10}) \mid |\text{Image}(f)| = 3\} / S|$

כאשר S הוא יחס השקילות המוגדר על ידי:

$S = \{\langle f, g \rangle \in (I_5 \rightarrow I_{10})^2 \mid g = f \circ h \text{ ש } h \text{ הפיכה כך ש}\}$

4 נגדיר סדרה של קבוצות a_n על ידי $a_0 = \emptyset$ ולכל $n \geq 1$, $a_n = \cup a_{n-1}$ וסדרה נוספת b_n על ידי $b_0 = \emptyset$ ולכל $n \geq 1$, $b_n = b_{n-1} \cup \{b_{n-1}\}$

א. חשבו את a_7

ב. חשבו את $b_7 \Delta (\cup b_8)$ (הסימן Δ מייצג הפרש סימטרי).

ג. חשבו את $(\cup_{n \in \mathbb{N}} b_n) \Delta \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

תזכורת באשר לסימון $\cup A$: הוא איחוד כל הקבוצות שהן אברים של A .

5. הגדרות: **איזומורפיזם** מגרף (פשוט, בלתי מכוון) $G=(V,E)$, לגרף (כני"ל) $G'=(V',E')$ הוא פונקציה הפיכה $f:V \rightarrow V'$ כך שכל שני קדקדים x ו- y מתוך V הם קצותיה של קשת ב- E , אם ורק אם $f(x)$ ו- $f(y)$ הם קצותיה של קשת ב- E' . איזומורפיזם מגרף G לעצמו, יקרא **אוטומורפיזם** של G .

א. הציגו גרף פשוט על קבוצת הקדקדים $V=\{1,2,3,4\}$, שכל פונקציה הפיכה מ- V ל- V היא אוטומורפיזם שלו.

ב. מה העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקדקדים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, עם המגבלה ששום שניים מהם אינם איזומורפיים?

ג. צייר את העץ המתקבל מהמילה $(2,3,2,4,7,10,1,1)$ לפי הקידוד (קוד Prüfer) בהוכחת משפט קיילי?

הערה: אין קשר בהכרח בין הסעיפים השונים של השאלה.

בהצלחה !