

סמסטר א' תשס"ט
מועד א' 20.2.2009

מתמטיקה בדידה
אברון, דר, טרסי, רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות.

להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**. יש להשיב על **כל תשע** השאלות. לכל פתרון יש להציג הוכחה מלאה, נסמכת על חומר שהוצג בקורס.

חלק ראשון (שאלות 1 עד 5)

ניקוד השאלות בחלק זה (לא לפי הסדר): 20, 10, 10, 10, 5 סה"כ 55 נקודות. חישוב הציון: לפתרון כל שאלה יקבע ציון גלמי עד 10 נק'. לפני הסיכום יוכפל הציון הגלמי הגבוה ביותר בשתיים והנמוך ביותר יחולק בשתיים.

1. חשבו את האיחוד ואת החיתוך של הקבוצות הבאות (כלומר לקבוצה F חשבו את $\cup(F)$ ואת $\cap(F)$). אין צורך לנמק את הפתרון. במקרה שהביטוי אינו מוגדר הסבירו מדוע.

א. $\{\emptyset, \{1,2\}\}$ ב. $\{\emptyset\}$ ג. \emptyset ד. $\{\{1\}\}$ ה. $\{1\}$ ו. $P(N)$

2. הגדירו את פעולת החזקה בין עוצמות, ונסחו במונחי פונקציות (ללא הוכחה), את הטענה כי הפעולה, כפי שהגדרתם אותה, אכן מוגדרת היטב.

3. בהנתן פונקציה f מ- N ל- $P(N)$, הציגו תת קבוצה B של N , שאינה שייכת לתמונה של f , והוכיחו במדויק כי הקבוצה B אכן מקיימת דרישה זו.

4. נתונה הפונקציה: $H = \lambda f \in N \rightarrow R, g \in N \rightarrow R. \{ \langle f(n), g(n) \rangle \mid n \in N \}$. תהינה $f, g \in N \rightarrow R$ שתי פונקציות, ונניח ש- f חד-חד ערכית. הוכיחו כי $H(f, g)$ היא פונקציה (עבור תחום מתאים) וחשבו את עוצמת התחום שלה.

5. א. תהינה x ו- b עוצמות כך ש- $1 < x \leq b$ ו- $b^2 = b$. הוכיחו: $x^b = 2^b$.

ב. תהא B קבוצה של עוצמות אינסופיות כך שלכל עוצמה b מתוך B , מתקיים $b^2 = b$. הראו כי הפונקציה $(x > 0 \wedge x \leq b \wedge \forall c. c > 0 \Rightarrow x^c \neq b^c)$ מוגדרת היטב (המשתנים x, b , ו- c מציינים עוצמות).

תזכורת: $1x P$ הוא הערך היחיד של x , שעבורו P הוא פסוק אמת.

חלק שני בעמוד הבא

חלק שני (שאלות 6 עד 9)

ניקוד השאלות בחלק זה (לא לפי הסדר): 20, 10, 10, 5 סה"כ 45 נקודות.
 חישוב הציון: לפתרון כל שאלה יקבע ציון גלמי עד 10 נק'. לפני הסיכום יוכפל הציון הגלמי הגבוה ביותר בשתיים והנמוך ביותר יחולק בשתיים.

6. חשבו את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}. a_n$, המוגדרת על ידי $a_0=1$, $a_1=2$ ומשוואת הנסיגה $a_{n+1}=2a_n-5a_{n-1}+(n-1)$ לכל $n \geq 1$.
 הערה: למי שהתחום הלא סטנדרטי של האינדקסים מפריע לפתור השאלה בשיטות שלמדו בכיתה או בתרגול, מומלץ, כצעד ראשון, להעביר את המשוואה לצורה הנוחה להם.

7. כמה הצגות לקבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד k , כאיחוד ארבע תת קבוצות זרות A, B, C ו- D , כאשר הקבוצות A ו- B אינן ריקות, וב- C מספר אברים זוגי?

8. תהינה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ו- $B = \{a, b, c, d\}$. נגדיר יחס שקילות \sim בקבוצה $A \rightarrow B$ על ידי $f \sim g \Leftrightarrow \exists h \in Eq(A, A). f = g \circ h$.
 תזכורת: $Eq(A, A)$ היא קבוצת הפונקציות ההפיכות (פונקציות שקילות) מ- A על עצמה.

9. יחס S בקבוצה A , כך ש- $\forall a \in A. \langle a, a \rangle \notin S$ יקרא אי-רפלקסיבי.
 יהיה S יחס סימטרי ואי-רפלקסיבי בקבוצה A , בת שני אברים לפחות.
 נגדיר פונקציה d על ידי: $d = \lambda a \in A. |\{b \mid \langle a, b \rangle \in S\}|$
 הראו כי אם d חד-חד ערכית אזי A אינסופית.
 הדרכה: הניחו כי A סופית בת n אברים. מהי, במקרה זה, התמונה של d ?

בהצלחה!