פתרון בחינה במתמטיקה בדידה

סמסטר א׳, תשס״ט, מועד א׳, 20.2.2009

1. התשובות מרוכזות בטבלה:

הקבוצה	$\{\{1,2\},\varnothing\}$	$\{\varnothing\}$	$\varnothing$	$\{\{1\}\}$	$\{1\}$	$P(N)$
האיחוד	$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	אינו מוגדר (זו אינה משפחה של קבוצות)	N
החיתוך	$\varnothing$	$\varnothing$	אינו מוגדר, כי ״אוסף כל העצמים״ אינו קבוצה	$\{1\}$		$\varnothing$

2. עבור שתי עוצמות a,b נגדיר $a^b=|B\to A|$ כאשר A,B קבוצות המקיימות $|A|=a,\ |B|=b$.
הפעולה מוגדרת היטב: לכל ארבע קבוצות A_1, A_2, B_1, B_2, אם קיימת פונקצית שקילות מ-A_1 על A_2 וגם קיימת פונקצית שקילות מ-B_1 על B_2 אז קיימת פונקצית שקילות מ- $B_1\to A_1$ על $B_2\to A_2$.

3. עבור פונקציה f מ-N ל-$P(N)$ נגדיר את הקבוצה $B=\{n\in N \mid n\notin f(n)\}$.
B אינה בתמונת f: נניח בשלילה שקיים $m\in N$ עבורו $f(m)=B$ ונקבל:
$m\notin f(m) \Leftrightarrow m\in\{n\in N \mid n\notin f(n)\} \Leftrightarrow m\in B \Leftrightarrow m\in f(m)$, וזו סתירה.

4. תהיינה $f,g\in N\to R$ שתי פונקציות ונניח ש-f חד-חד ערכית. $H(f,g)=\{\langle f(n),g(n)\rangle \mid n\in N\}$.
עלינו להראות כי $\forall a,b_1,b_2\in R.\ \left(\left(\langle a,b_1\rangle\in H(f,g)\wedge\langle a,b_2\rangle\in H(f,g)\right)\Rightarrow b_1=b_2\right)$. ואכן, יהיו $\langle f(n),g(n)\rangle,\langle f(m),g(m)\rangle\in H(f,g)$. אם $f(n)=f(m)$ אז מכך ש-f חד-חד ערכית נקבל $n=m$ ולכן גם $g(n)=g(m)$ (מחד-ערכיות g), כדרוש.
התחום של הפונקציה $H(f,g)$ הוא $\mathrm{dom}(H(f,g))=\{\pi_1(z) \mid z\in H(f,g)\}=\{f(n) \mid n\in N\}=\mathrm{Im}(f)$.
הפונקציה f היא פונקצית שקילות מקבוצת הטבעיים N על תמונתה, שכן f חח״ע וכל פונקציה היא **על** תמונתה. לכן $|\mathrm{dom}(H(f,g))|=|\mathrm{Im}(f)|=|N|=\aleph_0$.

5. **א.** תהיינה x,b עוצמות המקיימות $1<x\le b$ ו- $b^2=b$.
$2^b \le x^b \le b^b \le (2^b)^b = 2^{(b2)} = 2^b$, ומכאן הדרוש לפי משפט קנטור-ברנשטיין.
שני אי השוויונים השמאליים נובעים מהנתון $1<x\le b$ והשלישי ממשפט קנטור. השוויון הראשון מחוקי החזקה והשני מהנתון $b^2=b$.

ב. תהא B קבוצה של עוצמות אינסופיות כך שלכל עוצמה $b\in B$ מתקיים $b^2=b$.
נראה שלכל $b\in B$ קיימת עוצמה יחידה x המקיימת $x>0\wedge x\le b\wedge\forall c.c>0\Rightarrow x^c\ne b^c$.
העוצמה $x=1$ מקיימת את הדרישה: $0<1\le b$ ולכל עוצמה $c>0$ מתקיים $1^c\ne b^c$, הרי $1^c=1$ ו- $b\le b^c$ אינסופית. בנוסף, כל עוצמה $x\ne 1$ לא תקיים את הדרישה שלעיל שכן אם $1<x\le b$ אז קיימת עוצמה $c>0$ עבורה $x^c=b^c$: נבחר את c להיות b ומהסעיף הקודם נקבל $x^b=b^b=2^b$.
לפיכך, הפונקציה המתאימה לכל $b\in B$ את ה-x היחיד המקיים $x>0\wedge x\le b\wedge\forall c.c>0\Rightarrow x^c\ne b^c$ מוגדרת היטב, וזו למעשה הפונקציה $\lambda b\in B.1$.

6. **פתרון 1:** תהא F הפונקציה היוצרת את הסדרה הנתונה. אזי:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+2x+\sum_{n=0}^{\infty}(2a_{n+1}-5a_n+n)x^{n+2}=1+2x+2x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}-5x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$$

$$=1+2x+2x(F(x)-1)-5x^2F(x)+\frac{x^3}{(1-x)^2}$$

נחלץ את F ונקבל: $F=\lambda x.\dfrac{(1-x)^2+x^3}{(1-2x+5x^2)(1-x)^2}$.

פתרון 2: כדי שתנאי הנסיגה יחול על כל מספר טבעי, כולל 0, נציב k=n-1 ונקבל $a_{k+2}=2a_{k+1}-5a_k+k$. נחליף כל מחובר במשואה בפונקציה היוצרת הרגילה שלו (ליתר דיוק, ערכה של הפונקציה ב-x של הסדרה שהמחובר הוא האבר הכללי שלה), כאשר F הפונקציה היוצרת של הסדרה $\lambda k\in N.a_k$ ונקבל:

$$\frac{F(x)-a_0-a_1x}{x^2}=2\cdot\frac{F(x)-a_0}{x}+5F(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

(הפונקציות היוצרות של הסדרות $\lambda k\in N.k$ ו- $\lambda k\in N.a_{k+i}$ מופיעות בדפי הנוסחאות שצורפו לבחינה). נציב עתה את תנאי ההתחלה הנתונים ונחלץ מהמשואה את *F(x)*.

7. הבעיה שקולה למספר הדרכים לחלוקת k כדורים שונים לארבעה תאים כאשר שני התאים הראשונים אינם ריקים ובתא השלישי מספר זוגי של כדורים. נציג עבורה כמה פתרונות אפשריים.

פתרון 1: הפונקציה היוצרת המעריכית שמתאימה לבעיה היא:

$$\lambda x.(e^x-1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x=\lambda x.\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{4x}-2e^{3x}+2e^{2x}-2e^x+1\right)\cdot$$

פונקציה זו יוצרת מעריכית את הסדרה $\lambda k\in N.\begin{cases}\frac{1}{2}\left(4^k-2\cdot3^k+2\cdot2^k-2\right) & k\in N^+\\ 0 & k=0\end{cases}$,

ולכן התשובה היא $\frac{4^k}{2}-3^k+2^k-1$.

פתרון 2: נשתמש ב**עקרון ההכלה וההדחה**. נסמן ב- U את קבוצת כל החלוקות, ב-A את קבוצת החלוקות בהן התא הראשון ריק, ב-B את קבוצת החלוקות בהן התא השני ריק, וב-C את קבוצת החלוקות בהן מספר הכדורים בתא השלישי הוא אי-זוגי. מספר החלוקות המבוקש הוא בדיוק

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|=|U|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|.$$

נחשב כל אחד מהביטויים הנ"ל: $|U|=4^k$, $|A|=|B|=3^k$, $|A\cap B|=2^k$

$$|C|=\sum_{\substack{c=0\\ c\in\mathbb{N}_{odd}}}^{k}\binom{k}{c}3^{k-c}=\frac{1}{2}\left(4^k-2^k\right),\quad |A\cap C|=|B\cap C|=\sum_{\substack{c=0\\ c\in\mathbb{N}_{odd}}}^{k}\binom{k}{c}2^{k-c}=\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)$$

$$|A\cap B\cap C|=\sum_{\substack{c=0\\ c\in\mathbb{N}_{odd}}}^{k}\binom{k}{c}=2^{k-1}$$

מהצבה בעקרון ההכלה וההדחה נקבל $\frac{4^k}{2}-3^k+2^k-1$.

פתרון 3: (חישוב ישיר אך מייגע) נסמן ב- a את מספר הכדורים בתא הראשון, ב-b את מספר הכדורים בתא השני, וב-c את מספר הכדורים בתא השלישי. נשים לב כי $1\le a\le k-1$, $1\le b\le k-a$ ו-c זוגי. נפצל לשני מקרים את סך החלוקות:

א. *b=k-a*, כלומר התאים השלישי והרביעי ריקים. מספר החלוקות במקרה זה הוא 2^k-2.

ב. *a+b<k*.

$$\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\left(\sum_{b=1}^{k-a-1}\binom{k-a}{b}\left(\sum_{\substack{c=0\\ c\in\mathbb{N}_{even}}}^{k-a-b}\binom{k-a-b}{c}\right)\right)=\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\left(\sum_{b=1}^{k-a-1}\binom{k-a}{b}2^{k-a-b-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\left(\sum_{b=1}^{k-a-1}\binom{k-a}{b}2^{k-a-b}\right)\underset{t=k-a}{=}\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\left(\sum_{b=1}^{t-1}\binom{t}{b}2^{t-b}\right)=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\left(3^t-2^t-1\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}3^{k-a}-\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}2^{k-a}-\sum_{a=1}^{k-1}\binom{k}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(4^k-3^k-1\right)-\left(3^k-2^k-1\right)-\left(2^k-1-1\right)\right)=$$

$$\frac{4^k}{2}-3^k+1$$

סכום שני המקרים הוא בדיוק $\frac{4^k}{2}-3^k+2^k-1$.

<u>הערה</u>: הצורך בפיצול למקרים נובע מכך ש $\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\in\mathbb{N}_{even}}}^{n}\binom{n}{\ell}=2^{n-1}$ עבור *n>0* בלבד.

8. **אבחנה**: לכל $f,g\in A\to B$, $f\sim g$ אם ורק אם $\forall b\in B.|\{a\in A|g(a)=b\}| = |\{a\in A|f(a)=b\}|$.
הוכחה: אם $f\sim g$ אז קיימת פונקצית שקילות $h\in A\to A$ עבורה $f=g\circ h$. יהא $b\in B$, אזי
$|\{a\in A|g(a)=b\}| = |\{h(a)\in A|g(h(a))=b\}| = |\{h(a)\in A|f(a)=b\}| = |\{a\in A|f(a)=b\}|$.
בכיוון השני, נניח ש- $\forall b\in B.|\{a\in A|g(a)=b\}| = |\{a\in A|f(a)=b\}|$. אזי לכל $b\in B$ קיימת פונקצית שקילות מ- $\{a\in A|f(a)=b\}$ על $\{a\in A|g(a)=b\}$, ותהא h פונקצית השקילות המתקבלת מאיחוד ארבע פונקציות אלה (כקבוצות של זוגות סדורים). פונקציה זו מקיימת $f=g\circ h$, כדרוש.
מהאבחנה שלעיל,כל מחלקת שקילות מוגדרת ע״י מספרי איברי התחום שממופים לכל איבר בטווח.
על כן, עוצמת קבוצת המנה היא כמספר הדרכים לחלק $|A|=6$ כדורים **זהים** ל- $|B|=4$ תאים, היינו
$$\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}.$$

הסבר נוסף: פונקציה מ-A ל-B, כפי שראינו בכיתה, היא ״תמורה עם חזרות״ של שישה מתוך ארבעת התווים של הקבוצה B. הרכבת תמורה כזו g על פונקציה הפיכה מ-A על עצמה, משנה רק את סדר התווים ולא את מספרי ההופעות שלהם. לכן, המשותף לכל התמורות באותה מחלקת שקילות הוא מספרי ההופעות של כל אחד מהתווים. עוצמת המנה, כלומר, מספר מחלקות השקילות, הוא, לכן, כמספר ה״צרופים עם חזרות״ של 6 מתוך 4, כלומר $\binom{9}{3}=S(4,6)$.

9. יהא S יחס בקבוצה A שהוא אי-רפלקסיבי וסימטרי ונניח שהפונקציה d חד-חד ערכית. נניח בשלילה שהקבוצה A סופית ונסמן את עוצמתה ב-$n\geq 2$. הפונקציה d מתאימה לכל איבר a מ-A את מספר האיברים $b\in A$ המקיימים $\langle a,b\rangle\in S$. מאחר ש-S אי-רפלקסיבי, הערך המוחזר הוא מספר מתוך $\{k\in N \mid 0\leq k\leq n-1\}$. נשים לב שלא ייתכן שקיימים $a,b\in A$ כך ש- $d(a)=0$ וגם $d(b)=n-1\geq 1$, משום שמכך ש $d(a)=0$ נסיק ש $\langle a,b\rangle$ אינו ב-S ומכך ש $d(b)=n-1$ נסיק ש $\langle b,a\rangle$ שייך ל-S, בסתירה לכך ש- S סימטרי. לכן עוצמת תמונת הפונקציה d היא לכל היותר n-1. כעת, נתאים לכל אחד מאיברי A את תמונתו. מעקרון שובך היונים (n יונים, לכל היותר n-1 שובכים) נקבל ששני איברים מ-A ממופים לאותו הערך, בסתירה לכך ש- d חד-חד ערכית. לכן הקבוצה A אינסופית.